学校代号	10126
学　　号	20836024

分类号 O175.3　　　　　　　　　　密级

U D C　　　　　　　　　　　　　编号

论 文 题 目

几类微分算子的谱分析

研 究 生: 周立广

指导教师: 王万义 教授

专　　业: 应用数学

研究方向: 微分算子谱理论

二〇一三年三月三〇日



THE SPECTRAL ANALYSIS OF SEVERAL DIFFERENTIAL OPERATORS

Supervised by Professor
Wang Wanyi

School of Mathematics Sciences,
Inner Mongolia University,
Hohhot, 010021, P. R. China

March, 2013

原创性声明

本人声明：所呈交的学位论文是本人在导师的指导下进行的研究工作及取得的研究成果。除本文已经注明引用的内容外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得内蒙古大学及其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

学位论文作者签名：　　　　指导教师签名：

日　　期：2013.5.25　　日　　期：2013.5.25

在学期间研究成果使用承诺书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，即：内蒙古大学有权将学位论文的全部内容或部分保留并向国家有关机构、部门送交学位论文的复印件和磁盘，允许编入有关数据库进行检索，也可以采用影印、缩印或其他复制手段保存、汇编学位论文。为保护学院和导师的知识产权，作者在学期间取得的研究成果属于内蒙古大学。作者今后使用涉及在学期间主要研究内容或研究成果，须征得内蒙古大学就读期间导师的同意；若用于发表论文，版权单位必须署名为内蒙古大学方可投稿或公开发表。

学位论文作者签名：　　　　指导教师签名：

日　　期：2013.5.25　　日　　期：2013.5.25

目 录

几类微分算子的谱分析

摘 要

本文主要围绕不连续奇异微分算子的谱及具有特殊系数微分算子谱的离散性展开研究.

首先, 应用算子方法和函数论的方法, 研究了正则端点处边界条件含特征参数且一个内点处具转移条件的奇异 Sturm-Liouville算子问题, 结合转移条件定义新的内积，把所研究的问题转换成一个直和 Hilbert空间中相应的奇异算子问题, 在此空间下得到了新算子是自伴算子, 它的特征值与所研究问题的特征值是一致的; 通过所研究问题的基本解, 获得了其特征值是实的至多有可数多个且下方有界及特征值刚好其判别函数的零点. 进一步给出了所研究问题特征值的渐近公式. 接着我们研究了两类边界条件都含特征参数的不连续奇异 Sturm-Liouville算子的谱, 通过构造新 Hilbert空间, 把所研究的问题转换成新空间下相应的算子问题, 得到了此算子是自伴算子; 通过给定的边界条件, 将特征值问题转化为判别函数的零点问题, 得到了其特征值的相关性质及特征值的渐近公式.

其次, 研究了具实幂指积系数、实欧指积系数的偶数阶对称微分算式所生成算子的谱, 运用算子分解与二次型比较的方法, 得到了微分算式的系数在一定的条件下该类微分算子所有自伴扩张的谱是离散的; 另外, 还研究了具有一般系数的实对称微分算式生成算子的谱, 得到该类算子无论末项和首项系数按照某种方式以无穷大为极限时其所有自伴扩张的谱是离散的, 还是中间项系数按照一定的方式以无穷大为极限时也可决定其所有自伴扩张谱的离散性.

最后, 研究了一类具复指数系数的偶数阶对称微分算子的谱, 当其系数的实部与虚部都非负时, 得到了该算子只有离散谱; 进一步得到了微分算式系数的实部与虚部满足某种条件时其谱是离散的充分条件. 同时, 还研究了具复幂指积系数、复欧指积系数的 J-对称微分算式生成的算子谱的离散性, 得到了系数的实部或虚部满足某些条件时其生成的 J-自伴微分算子的本质谱是空集, 即 J-自伴微分算子的谱是离散的.

本文共分七章, 第一章绪论, 叙述本文所考虑问题的背景及本文的主要结果; 第二章是文中所涉及的主要基本概念及基本性质; 第三章研究正则点处边界条件含特征参数且具有转移条件的奇异 Sturm-Liouville问题; 第四章研究两个边界条件都含特征参数的不连续奇异 Sturm-Liouville问题; 第五章研究边界条件都含特征参数且具有限个不连续点的奇异 Sturm-Liouville问题; 第六章研究具有特殊系数偶数阶微分算子谱的离散性; 第七章研究具有特殊系数 J-对称微分算子谱的离散性.

关键词： 微分算子, 奇异, 转移条件, 特征值, J-对称, 本质谱, 离散谱

THE SPECTRAL ANALYSIS OF SEVERAL DIFFERENTIAL OPERATORS

ABSTRACT

In this paper, we investigate the spectrum of discontinuous singular differential operators and the discreteness of spectrum for several differential operators with special coefficients.

Firstly, the singular Sturm-Liouville problem with eigenparameter dependent boundary condition at regular endpoint and with transmission conditions at one inner point of a finite interval is obtained with operator method and function theory. A new direct sum Hilbert space be defined by the new product associated with transmission conditions. In this space the considered problem is converted the corresponding singular operator and the singular operator is self-adjoint. Its eigenvalues coincide with eigenvalues of Sturm-Liouville problem. Then we prove that the eigenvalues are real, at most countable, bounded below and they are the zeros of its discriminant function. And we give asymptotic formulas for its eigenvalues. Furthermore the discontinuous singular Sturm-Liouville problems with eigenparameter dependent two boundary conditions are considered. The problems become the corresponding operator problems with constructing new Hilbert space and the self-adjointness of the problems are got. And the eigenvalues coincide with the zeros of its discriminant function and asymptotic formulas for the eigenvalues are investigated.

Secondly, we consider the spectrum of differential operators for symmetric differential expressions with real power-exponential product coefficients and real Euler-exponential product coefficients. If coefficients of differential expresses satisfy certain conditions, the spectrum of such operators is discrete with methods of direct sum decomposition for operators and quadratic comparison. And the discreteness of spectrum for differential operator which is generated by symmetric differential with general coefficients is discussed. We further find that the discreteness of the spectrum of such operators not only determined by the last term and first term coefficient whose limits are infinity in some certain way, but also the middle term coefficient whose limits are infinity with certain way also can decide the discreteness of the spectrum.

Finally, the spectrum of a class of even order symmetric differential operator with

complex exponential coefficient be discussed. The spectrum of the considered differential operator is discrete when the real part and imaginary parts of its coefficients are non-negative. Furthermore the spectrum is discrete if the real and imaginary parts of its coefficients satisfy the general appropriate conditions. And then the discreteness of spectrum for differential operators are investigated which be generated by J-symmetric differential expressions with complex power-exponential product coefficient and complex Euler-exponential product coefficient respectively. The essential spectrum of any J-self-adjoint extensions for the minimal operator is empty when the real and imaginary parts of those coefficients satisfy some conditions, i.e. the spectrum of any J-self-adjoint extensions is discrete.

This thesis is divided into seven chapters. The backgrounds and the main results of the discussed questions are described in chapter 1. In Chapter 2, we give the related fundamental concepts and properties involved in this thesis; The singular Strum-Liouville problem with eigenparameter dependent boundary conditions at regular endpoint and transmission conditions is considered in Chapter 3. Chapter 4 investigates a class of discontinuous singular Strum-Liouville problem with eigenparameter dependent boundary conditions. The discontinuous singular Strum-Liouville problem with eigenparameter dependent boundary conditions and with transmission conditions at finite inner points of considered interval be investigated in Chapter 5. Chapter 6 study the discreteness of the spectrum on several even order differential operators with special coefficients and the discreteness of the spectrum for several J-symmetric differential operators with special coefficients are given in Chapter 7.

KEYWORDS: differential operators, singular, transmission conditions, eigenvalues, J-symmetric, essential spectrum, discrete spectrum

第一章　绪论

微分算子也是算子理论体系中广泛应用的最基本一类无界线性算子, 是算子理论的一个重要组成部分. 微分算子的研究领域十分广泛, 包括微分算子的自伴扩张理论、谱理论、数值计算以及反问题等许多重要分支, 内容纷繁浩瀚. 特别地, 微分算子谱理论是 20 世纪迅速发展起来的新兴交叉学科领域, 它以量子物理为主要应用背景, 它为微分方程众多问题提供了统一的理论框架和解决模式. 本文重点研究了不连续奇异微分算子的谱与几类具特殊系数微分算子谱的离散性.

1.1　具有转移条件微分算子的研究

自 1836 年至今, Sturm-Liouville 问题, 特别是正则的 Sturm-Liouville 问题 ([1]-[6], [13]-[14], [41]-[44], [72]-[73], [86]) 的研究在理论上和方法上都已相当完备, 但最经典的 Sturm-Liouville 算子最大算子域中的函数要求至少一阶导函数是绝对连续的, 即使是这样的要求在一些实际问题中也不能被满足. 为此, 近年来越来越多数学工作者将研究兴趣转向具有转移条件的 Sturm-Liuouville 问题, 它有着重要的应用前景,例如热传导和质量转移问题 [45], 衍射问题 [99]等, 都可以转化为内部具有不连续点的微分算子问题. 微分方程中不仅可以出现特征参数, 而且边界条件里也可以出现特征参数, 许多工程技术领域中的一些偏微分方程如热传导方程或波动方程利用分离变量法便得到边界条件中带特征参数的微分方程边值问题 [15]. 正是由于许多实际问题往往需要转化为具有转移条件微分算子的问题, 因此对具有转移条件微分算子谱的研究是非常有意义的. 具有转移条件的正则微分算子已有诸多成果 ([3]-[6], [16], [25], [32], [51]-[54], [87], [98]- [101]), 而具有转移条件的奇异微分算子的研究相对较少 ([7],[26]-[28]). 为此, 我们针对具有转移条件的奇异微分算子进行了研究, 并将正则情形的相关结论成功地推广到奇异情形.

本文应用算子方法和函数论的方法, 研究了正则端点处边界条件含特征参数且一个内点处具转移条件的奇异 Sturm-Liouville算子问题, 结合转移条件定义新的内积，把所研究的问题转换成一个直和 Hilbert空间中相应的奇异算子问题, 在此空间下得到了新算子是自伴算子, 它的特征值与所研究问题的特征值是一致的; 通过所研究问题的基本解, 获得了其特征值是实的至多有可数多个且下方有界及特征值刚好其判别函数的零点. 进一步给出了所研究问题特征值的渐近公式. 接着我们研究了两类边界条件都含特征参数的不连续奇异 Sturm-Liouville算子的谱, 通过构造新 Hilbert空间, 把所研究的问题转换成新空间下相应的算子问题, 得到了此算子是自伴算子; 通过给定的边界条件, 将特征值问题转化为判别函数的零点问题, 得到了其特征值的相关性质及特征值的渐近公式.

1.2 常微分算子谱的离散性研究

微分算子谱理论是微分算子理论中的重要组成部分之一, 它包括微分算子谱的定性、定量分析, 特征值、特征函数的渐近估计, 特征函数系的完备性及反谱问题等. 由于微分算子谱理论与物理实际应用紧密相联, 譬如奇异微分算子谱分析是解决量子力学的得力数学工具, 因此它倍受数学和物理科研工作者的广泛关注. 特别是1953年 Molchnov [49] 的二阶微分算子谱的离散性判别准则发表以来, 谱的定性、定量分析方面在国际蓬勃发展起来无论是阶数由低到高, 还是权函数由有到无, 以及微分算式系数由由实到复等方面取得了许多研究成果(其专著见[17], [21], [24], [34], [50], [60], [74], [78]).

谱的定性分析是指通过微分算式的系数、问题的边界条件来分析判断微分算子谱的相关性质. 关于微分算子谱的定性定量分析, 其研究工作有两个主要途径: 一个是分析法的途径, 另一个是算子法的途径. 分析法和算子法这两种方法最早见于在有限区间上经典的 Sturm-Liouville 问题的研究：即 Liouville 的渐近估计方法和 Courant 的变分方法.

所谓分析法, 是以解析函数理论为基础分析预解式、Green 函数和微分方程解的渐近性质来判断微分算子谱的性质. 这方面的应用体现于 Titchmarsh 和 Levitain 为代表学者的工作中, 仅就经典著作 ([44], [86])中使用的方法就体现出了超高的技巧性和工作的艰巨性. 这种方法的优点是即便对于高阶的微分算子, 在一定程度上仍然十分奏效, 一般地系数需要另外的附加条件. 用算子的方法处理微分算子谱的定性定量分析, 是半个世纪来广泛采用的方法. 在 M. A. Naimark [60], I. M. Glazman [34], E. Müller-Pfeiffer [50], D. E. Edmunds 和 W. D. Evans [21] 关于微分算子谱分析的专著里使用的都是算子的方法. 这种方法的理论基础是 Hilbert 空间中闭线性算子的谱理论和全连续摄动的相关理论 ([22]), 其根本方法有两个, 一个是算子分解的方法, 另一个是二次型比较的方法. 算子分解的方法在处理奇异微分算子谱的离散性分析时, 由有限区间上正则微分算子本质谱是空集, 故我们可以忽略系数在有限区间上的取值情况, 其谱的离散性仅取决于系数在无穷远附近的取值. 二次型比较的方法, 是通过 Sobolev 空间嵌入算子的连续性、紧性的刻画来研究奇异微分算子谱的下有界性和离散性. 由于自伴算子的剩余谱是空集, 奇异微分算子谱的定性分析, 主要集中于研究其本质谱的存在区间, 谱的离散性等方面. 当奇异微分算子的谱是离散时, 其豫解式, Green 函数, 按本征函数展开等与正则微分算子情形十分相似, 处理上就会变得更加方便简洁, 所以关于微分算子谱的离散性研究一直以来倍受重视, 取得了许多成果, 如 [8]-[11], [18]-[19], [22]-[23], [33], [35]-[39], [55]-[57], [75]-[85], [89]- [108] 等一系列工作. 尽管微分算子谱的离散性问题已经获得了丰硕的成果, 但是至今微分算子谱的离散性问题的统一框架仍没有彻底解决(*以上综述部分的材料来源于文献* [14], [78], [79]).

具有相同有限亏指数的对称微分算子的自伴扩张并不是唯一确定的, 但它的所有自伴扩张都具有相同的本质谱, 即自伴算子谱的离散性质完全仅依赖于它所对应的微分算

式的系数. 正是由于微分算子的谱分析和系数之间有着复杂的连带关系, 才致使目前已有的工作绝大部分集中于常系数、幂系数、指数函数系数或者是系数可以用幂函数、指数函数来估计的微分算子的谱分析上. 而对于某些特殊系数诸如幂指积系数、欧指积系数的情形未曾见多少成果. 我们从某些特殊系数的角度给出微分算子谱的离散性的判别准则, 丰富了微分算子谱的离散性的相关成果, 为构造微分算子谱的离散性问题统一框架提供了相关信息. 本文首先研究了具实幂指积系数、实欧指积系数的偶数阶对称微分算子的谱, 运用算子分解与二次型比较的方法, 得到了微分算式的系数在一定的条件下该类微分算子仅有离散谱; 其次研究了一类具一般系数的对称微分算式生成的自伴微分算子的谱, 得到该类微分算子无论末项和首项系数按照某种方式以无穷大为极限时其谱是离散的, 还是中间项系数按照一定方式以无穷大为极限时也可决定其谱的离散性. 这个主要结果是 E.Müller-Pfeiffer 关于常微分算子具有离散谱条件下关于末项系数积分相应描述的推广, 并且包含了二阶和高阶两项微分算式所生成的最小算子的所有自伴扩张的谱是离散的著名的 A.M.Molchanov 判定定理.

1.3 J-对称微分算子谱的研究

J-自伴微分算子的谱理论的研究起源于人们对耗散算子和具有复势能的 Schrödinger 算子的研究. J-对称微分算子在某些方面的性质可能较对称微分算子有更为简洁明了, 比如每个 J-对称微分算子都有 J-自伴扩张. 但在许多方面 J-对称微分算子比对称微分算子的性质更为复杂, 比如复系数 Sturm-Liouville 问题的点型与圆型属性就完全异于实系数情形, 细节可参看 [71].

当算子是自伴或 J-自伴时, 它的剩余谱是空集, 从而只需研究其点谱和连续谱. J-自伴算子是非对称算子, 从而, 它不是自伴算子, 它的谱可能不仅限于实轴上. 因为自伴算子的谱可分为离散谱和本质谱两部分, 所以J-自伴微分算子谱的定性分析类似于自伴微分算子的谱分析, 也就是给出 J-自伴微分算子谱的分布即点谱、连续谱的存在围范, 离散谱、本质谱的存在区间, 判断 J-自伴微分算子谱的离散性以及相应的特征函数系的完备性等等. 对于 J-对称微分算子理论的研究, 继 Naimark [60], Glazman [34] 和 Simes [71] 之后, Lidskii [46]- [48], Gohberg [31], Mcleod [58]- [59], Race [63]- [69], Kamimura [40], Fleckinger [29], Ednums, Evans [21] 等在不同程度上给出了 J-自伴微分算子谱是离散的一些判别条件, 同时也得到了关于 J-自伴微分算子特征问题的相关结论. 20世纪末21世纪初期, 孙炯教授, 尚在久 [81]- [82], 王忠 [92]-[93], 杨传富[102] 等在已有工作的基础上对于 J-对称微分算子谱的定性、定量分析进一步做了大量的研究, 取得了丰硕的成果, 丰富和发展了 J-自伴微分算子的谱理论(以上综述部分的材料来源于文献 ([78], [93]). 我们利用算子的方法、分析方法和直和分解的方法, 研究了一类具复指数系数的偶数阶对称微分算子的谱, 得到

了微分算子系数的实部与虚部都非负是算子的谱是离散的一个充分条件; 进一步得到了微分算子系数的实部与虚部满足一般条件时其谱是离散的一些充分条件. 另外, 还研究了具复幂指积系数、复欧指积系数的 J-对称微分算式生成的算子谱的离散性, 得到了 J-自伴微分算子系数的实部或虚部满足某些条件时其本质谱是空集, 即 J-自伴微分算子的谱是离散的.

1.4 本文的结构和主要结果

本文主要围绕不连续奇异微分算子的谱及具特殊系数微分算子谱的离散性展开研究. 本文共分七章, 第一章绪论, 叙述本文所研究问题的背景及本文的主要结果; 第二章是文中所涉及的主要基本概念及基本性质; 第三章研究正则端点处边界条件含特征参数且具有转移条件的奇异 Sturm-Liouville问题; 第四章研究两个边界条件都含特征参数的不连续奇异 Sturm-Liouville问题; 第五章研究边界条件都含特征参数且具有限个不连续点的奇异 Sturm-Liouville问题; 第六章研究具特殊系数偶数阶微分算子谱的离散性; 第七章研究具特殊系数 J-对称微分算子谱的离散性.

本文的主要结果:

(一) 应用算子方法和函数论的方法, 研究了正则端点处边界条件含特征参数且一个内点处具转移条件的奇异 Sturm-Liouville算子问题, 结合转移条件定义新的内积，把所研究的问题转换成一个直和 Hilbert 空间中相应的奇异算子问题, 在此空间下得到了新算子是自伴算子, 它的特征值与所研究问题的特征值是一致的. 通过所研究问题的基本解, 获得了其特征值是实的至多有可数多个且下方有界及特征值刚好其判别函数的零点. 进一步给出了所研究问题特征值的渐近公式.

(二) 研究了两个边界条件含特征参数的不连续奇异 Sturm-Liouville 算子的谱, 通过构造一个新 Hilbert 空间, 把所研究的问题转换成新空间下相应的算子问题, 得到了该算子是自伴算子; 通过给定的边界条件, 将特征值问题转化为判别函数的零点问题, 得到了其特征值的相关性质并给出了其特征值的渐近公式.

(三) 讨论了边界条件都含特征参数且具有有限个不连续点的奇异 Sturm-Liouville算子的谱, 结合转移条件构造直和 Hilbert 空间, 将所研究的问题转换成新空间下的算子问题, 得到了该算子是自伴算子, 其特征值是实的至多可数个且下方有界的; 通过所研究问题的基本解, 给出了其特征值的渐近公式.

(四) 研究了具实幂指积系数、实欧指积系数的偶数阶对称微分算子的谱, 运用算子分解与二次型比较的方法, 得到当微分算式的系数在一定的条件下时该类微分算子所有自伴扩张的谱是离散的;

(五) 研究了一类具一般系数的对称微分算式生成的微分算子的谱, 得到该类微分算

子无论末项和首项系数按照某种方式以无穷大为极限时其所有自伴扩张的谱是离散的, 还是中间项系数按照一定的方式以无穷大为极限时也可决定其所有自伴扩张的谱的离散性.

(六) 研究了一类具复指数系数的偶数阶对称微分算子的谱, 当微分算子系数的实部与虚部都非负时, 得到了该算子的谱是离散的充分条件; 进一步得到了微分算子系数的实部与虚部在某些特定的条件下其只有离散谱.

(七) 研究了具复幂指积系数、复欧指积系数的 J-对称微分算式生成的算子的谱, 得到了 J-自伴微分算子系数的实部或虚部满足某些条件时其本质谱是空集, 即 J-自伴微分算子的谱是离散的.

本文处理问题的基本方法:

(一) 对于二阶不连续奇异微分算子谱分析的研究, 采用的方法是结合边界条件定义直和 Hilbert 空间, 将所研究的问题转化成新空间下相应的算子问题. 这种方法是处理不连续正则微分算子谱分析的基本方法, 而我们将其应用到二阶不连续奇异微分算子谱分析的研究上, 得到了不连续奇异微分算子谱的相关性质. 其研究的意义是通过特征值的渐近公式可以为相关的数值计算提供理论支持.

(二) 对于微分算子谱的离散性的研究, 广泛采用的方法是算子法和分析法. 我们同样利用这些方法研究了几类具有特殊实系数的对称微分算子谱的离散性及一些具有特殊复系数的J-对称微分算子谱的离散性, 得到了所研究问题的谱是离散的一些充分必要条件. 其主要目的是通过具有特殊系数的微分算子谱的离散性研究为具有一般系数微分算子谱的离散性统一框架的建立提供相关的信息.

第二章　基本概念及基本性质

为了方便阅读本文, 本章给出文中所涉及的主要基本概念以及相关性质, 其来源于文献 [13], [14], [34], [74], [103].

2.1　基本概念

本节给出文中所主要涉及的基本概念.

定义 2.1.1 设 $\mathbf{H}$ 是复线性空间, 如果对任意的 $x, y \in \mathbf{H}$, 都有一个复数 (x, y) 与之对应, 并且满足以下性质:

(1) $(x,x) \geq 0$, $(x,x) = 0$ 当且仅当 $x = 0$ (正定性);

(2) $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$ (可加性);

(3) $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$ (齐次性);

(4) $(x,y) = \overline{(y,x)}$ (齐次性),

其中 $\alpha \in \mathbb{C}$, 则称 (x,y)为 x 与 y 的内积, 定义了内积的空间 $\mathbf{H}$ 称为内积空间.

定义 2.1.2 完备的内积空间称为 Hilbert空间.

定义 2.1.3 设 T 是定义在 Hilbert空间 H 中的闭稠定线性算子, T^* 表示 T 的共轭算子. 若 $T \subset T^*$, 则称 T 是对称的; 若 $T = T^*$, 则称 T 是自伴的.

定义 2.1.4 定义域 $D(T)$ 在 Hilbert空间中 H 稠定的算子 T 称为 J-对称的, 如果对于 H 中的复共轭 J, 有 $JTJ \subset T^*$, 其中T^* 是 T 的共轭算子, $Jf(x) = \overline{f(x)}$. 特别地, 当 $JTJ = T^*$ 时, 我们把算子 T 称为 J-自伴算子.

定义 2.1.5 设 T_1, T_2 是 Hilbert空间 H 中的对称 (或 J-对称) 算子, 若 $T_1 \subset T_2$, 则称 T_2 是 T_1 的一个对称 (或 J-对称) 扩张.

定义 2.1.6 设 T_1 是对称 (或 J-对称) 算子, T_2 是自伴 (或 J-自伴) 算子, 若 $T_1 \subset T_2$, 则称 T_2 是 T_1 的一个自伴 (或 J-自伴) 扩张.

定义 2.1.7 设 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ 是 Banach空间, $T: \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ 是一个线性算子, 如果对于 $\mathbf{X}$ 中的任何有界子集 A, T 关于的值域的闭包 $\overline{T(A)}$ 是紧的, 则称T 是一个紧的线性算子, 或称全连续算子.

定义 2.1.8 设 T 是 Hilbert空间 H 中的闭对称线性算子, $\lambda(\Im\lambda \neq 0)$ 是一个复数, 则称子空间 $\mathscr{R}(T-\lambda I)^{\perp}$, $\mathscr{R}(T-\bar{\lambda}I)^{\perp}$ 为 T 的亏空间, 其中 $\mathscr{R}(\cdot)$ 表示算子的值域. 我们把亏空间 $\mathscr{R}(T-\lambda I)^{\perp}$, $\mathscr{R}(T-\bar{\lambda}I)^{\perp}$ 的维数分别记为 d^{+}, d^{-}, 则称 $def\, T=(d^{-}, d^{+})$ 为闭对称线性算子 T 的亏指数.

下面我们引入线性算子预解集和谱集的相关定义.

定义 2.1.9 设 H 是 Hilbert空间, T 是从 H 到 H 的线性算子. 令 $\mathscr{D}(T)$ 表示算子 T 的定义域, 并假设 $\mathscr{D}(T)$ 在 H 中稠密. λ 称为 T 的正则点, 如果 $\lambda I-T$ 的值域在 H 中稠密, 且其逆算子 $(\lambda I-T)^{-1}$ 为有界线性算子. 这样的 λ 的全体称为算子 T 的正则点集 (或称预解集), 记为 $\rho(T)$, 即

$$\begin{aligned}\rho(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda I-T\ \text{是一一的},\ \mathscr{R}(\lambda I-T)\ \text{在}\ H\ \text{中稠密},\\ (\lambda I-T)^{-1}\ \text{是有界线性算子}\}.\end{aligned}$$

在复平面中, 正则点集的补集称为算子 T 的谱集 $\sigma(T)$, 即

$$\sigma(T)=\mathbb{C}\setminus\rho(T).$$

复数集 $\sigma(T)$ 中的点称为算子 T 的谱点.

一般地, 谱集 $\sigma(T)$ 可分类为点谱 $\sigma_p(T)$, 连续谱 $\sigma_c(T)$ 和剩余谱 $\sigma_r(T)$,

$$\sigma(T)=\sigma_p(T)\cup\sigma_c(T)\cup\sigma_r(T),$$

其中

$$\sigma_p(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda I-T\ \text{不是一一的}\},$$

$$\sigma_r(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda I-T\ \text{是一一的, 但是}\ \mathscr{R}(\lambda I-T)\ \text{在}\ H\ \text{中不稠密,}\}.$$

$$\begin{aligned}\sigma_c(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda I-T\ \text{是一一的},\ \mathscr{R}(\lambda I-T)\ \text{在}\ H\ \text{中稠密},\\ \text{但是}\ (\lambda I-T)^{-1}\ \text{是无界线性算子}\}.\end{aligned}$$

我们把 $\lambda\in\sigma_p(T)$ 称为算子 T 的正则点, 把 $\lambda\in\sigma_p(T)$ 称为算子 T 特征值或本征值.

定义 2.1.10 设 λ 为 T 特征值, 则 $(\lambda I-T)y=0$ 的非平凡解 y 称为 T 的特征元素.

定义 2.1.11 设 T 是 Hilbert空间 H 上的自伴算子, 则把谱集 $\sigma(T)$ 中的全体聚点和无限重的孤立的特征值点所组成的集合称为 T 的本质谱, 记为 $\sigma_e(T)$.

本质谱在谱集中的补集称为 T 的离散谱, 记为 $\sigma_d(T)=\sigma(T)\setminus\sigma_e(T)$, 即 $\sigma_d(T)$ 是全体有限重的孤立的特征值点所组成的集合. 如果 $\sigma_e(T)=\phi$, 则称 T 的谱是离散的.

定义 2.1.12 点列 $\{x_n\}$ 称为线性算子 T 关于 λ 的 Weyl 列, 如果 $\{x_n\}\subset D(T), \| x_n \|=1$, $\{x_n\}$弱收敛到 0, 且 $(T-\lambda I)x_n\to 0\ (n\to\infty)$.

下面将给出微分算式生成的微分算子的相关概念.

定义 2.1.13 设 $Ly(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k(x)y^{(k)}$ 是区间 I 上的微分算式, 称 $\sum\limits_{k=0}^{n}(\overline{a_k(x)}y)^{(k)}$ 为 $Ly(x)$ 的共轭微分算式, 记为 $L^*y(x)$. 如果 $L^*=L$, 则称微分算式 L 是对称的.

注 2.1.1 偶数阶对称微分算式的一般形式为

$$Ly=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(a_k(x)y^{(k)})^{(k)},$$

其中是 $a_k(x)$ 是实函数. 特别地, 二阶对称微分算式是

$$Ly=-(p(x)y)'+q(x)y,$$

其中 $p(x)$ 和 $q(x)$ 都是实函数, 通常称这个微分算式为 $Sturm-Liouville$算式.

2.2 基本性质

本节给出本文中基本概念的相关性质.

引理 2.2.1 若 T 是有界线性算子, T 的值域 $\mathcal{R}(T)$ 是有限维的, 则 T 是全连续算子 (或紧的线性算子).

引理 2.2.2 设 $\mathbf{X},\mathbf{Y}$ 是 Banach 空间, T 是从 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{Y}$ 的线性算子, 则下列叙述是等价的:

(1) T 是全连续算子;

(2) $A\subset\mathbf{X}$ 是一个有界集, 则 $T(A)$ 包含在 $\mathbf{Y}$ 的一个紧子集中;

(3) $A\subset\mathbf{X}$ 是一个有界集, 则 $T(A)$ 包含在 $\mathbf{Y}$ 的一个自列紧的子集之中;

(4) 对于 $\mathbf{X}$ 中的任何有界点列 $\{x_n\}$, $\{Tx_n\}$ 中包含一个 $\mathbf{Y}$ 中的收敛的子列;

(5) 对于 $\mathbf{X}$ 中的任何有界集 A, $T(A)$ 是 $\mathbf{Y}$ 中的完全有界集.

引理 2.2.3 T 的亏指数 $\operatorname{def} T$ 仅与 λ 在上下平面的位置有关, 而与 λ 的取值无关.

引理 2.2.4 设 T 是 Hilbert 空间 H 中的闭对称算子, 其亏指数为 $\operatorname{def} T=(d^-, d_+)$, 则

(1) T 存在对称扩张的充要条件是 $d^- d_+ \neq 0$;

(2) T 存在自伴扩张的充要条件是 $d^- = d_+$;

(3) T 是最大对称算子但非自伴算子的充要条件是 d^-, d^+ 中恰有一个等于0;

(4) T 是自伴的充要条件是 $d^- = d_+ = 0$.

引理 2.2.5 若 T 为对称算子, 则 T 的特征值为实数, 且对应于不同特征值的特征元素相互正交. 特别地, 若 T 为自伴算子, 则 T 的特征值也为实数, 且对应于不同特征值的特征元素也相互正交.

引理 2.2.6 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的自伴算子, 则 $\sigma_r(T)=\emptyset$.

引理 2.2.7 自伴算子 T 的谱集中的任意离散点都是 T 的特征值.

引理 2.2.8 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的自伴算子, 则下列叙述是等价的:

(1) $\lambda \in \sigma_e(T)$;

(2) 存在 T 关于 λ 的 Weyl 列;

(3) 对于 $\forall \epsilon > 0$, $dim\mathrm{R}(E_{\lambda+\epsilon} - E_{\lambda-\epsilon}) = \infty$.

引理 2.2.9 (Lagrange 恒等式) 对于任意的 $y(x) \in D(L), z(x) \in D(L^*)$, 有

$$z(\bar{x})Ly(x) - y(x)\overline{L^*z(x)} = \frac{d}{dx}[yz](x),$$

其中 $L^*z(x) = -(\bar{p}z')'(x) + \bar{q}z(x)$ 是 $Ly(x) = -(py')'(x) + qy(x)$ 的共轭微分算式, $[yz](x) = p(y\bar{z}' - y'\bar{z})(x)$ 是半双线性型.

引理 2.2.10 (Green 公式) 对于任意的 $y \in D(L), z \in D(L^*)$, 有

$$(Ly, z) - (y, L^*z) = \int_a^b (\bar{z}Ly - y\overline{L^*z})dx = [yz](b) - [yz](a).$$

引理 2.2.11

$$\begin{vmatrix} [fu](x) & [fv](x) \\ [gu](x) & [gv](x) \end{vmatrix} = [f\bar{g}](x)[\bar{u}v](x).$$

第三章 正则端点处含特征参数且具有转移条件的奇异 Sturm-Liouville 问题

不连续的 Sturm-Liouville 问题由于其在物理上的应用背景引起了人们越来越多的研究兴趣, 比如质量和热量转换问题、绕射问题通常都会归结为带有转移条件的 Sturm-Liouville 问题. 对于具有转移条件的不连续 Sturm-Liouville 问题特征值的相关性质, 按特征函数展开等问题已为很多数学工作者所关注, 其研究主要集中于不连续正则微分算子, 但对不连续的奇异微分算子的相关研究比较少见. 本章应用算子方法和函数论的方法, 研究了正则端点处边界条件含特征参数且一个内点处具转移条件的奇异 Sturm-Liouville算子问题, 结合转移条件定义新的内积，把所研究的问题转换成一个新直和 Hilbert空间中相应的奇异算子问题, 在新空间下得到了该算子是自伴算子, 它的特征值与所研究问的特征值是一致的; 通过所研究问题的基本解, 获得了其特征值是实的至多有可数多个且下方有界及特征值刚好其判别函数的零点. 进一步给出了其特征值的渐近公式.

3.1 基本问题

考虑对称微分方程

$$Ly := -(p(x)y')' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in I, \tag{3.1.1}$$

和依赖于特征参数的边界条件

$$L_1 y := \lambda(\alpha_{11}y(-1) - \alpha_{12}y'(-1)) - (\alpha_{21}y(-1) - \alpha_{22}y'(-1)) = 0, \tag{3.1.2}$$

$$L_2 y := a[yy_1](1) + b[yy_2](1) = 0, \tag{3.1.3}$$

及 $x = 0$处具有转移条件

$$L_3 y := \rho_{11}y(0+) + \rho_{12}y'(0+) - \theta_{11}y(0-) - \theta_{12}y'(0-) = 0 \tag{3.1.4}$$

$$L_4 y := \rho_{21}y(0+) + \rho_{22}y'(0+) - \theta_{21}y(0-) - \theta_{22}y'(0-) = 0 \tag{3.1.5}$$

所生成的微分算子问题, 其中 $I = [-1, 0) \cup (0, 1)$, $p(x) = 1/p_1^2, x \in [-1, 0)$, $p(x) = 1/p_2^2, x \in$

(0,1) 是正实数; $q(x) \in L^1(I,R)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ 是复特征参数; 系数 $\alpha_{ij}, \rho_{ij}, \theta_{ij} \in R, i,j=1,2$. 极限 $y(0\pm) = \lim\limits_{x\to 0\pm} y(x)$ 是有限的. y_1, y_2 是方程 $-(p(x)y')' + q(x)y = 0$ 的两个线性无关解且 $[y_1y_2](1) = 1$.

本章假设 Ly 在 $x=1$ 处是极限圆型的, 式 (3.1.2)-(3.1.5) 中的系数满足

$$ab \neq 0,\ \alpha = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} > 0,\ \rho = \begin{vmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{vmatrix} > 0,\ \theta = \begin{vmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{vmatrix} > 0.$$

注 3.1.1 由于 Ly 在点 $x=1$ 处是极限圆型的, 则由引理 2.2.9 和引理 2.2.10 知, $\int_0^1 \bar{y}_1 Ly dx$, $\int_0^1 y\overline{L^* y_1} dx$ 和 $[yy_1](0)$ 是存在的, 故 $[yy_1](1)$ 存在. 同理, $[yy_2](1)$ 存在. 这说明边界条件 (3.1.3) 的给定是合理的.

3.2 问题的自伴性

在区间 I 上平方可积的复值可测函数全体组成的空间 $H_1 = L^2[-1,0) \cup (0,1)$ 中定义如下内积:

$$(f,g) = \theta p_1^2 \int_{-1}^{0} f_1(x)\overline{g_1(x)}dx + \rho p_2^2 \int_0^1 f_2(x)\overline{g_2(x)}dx, \quad f \in H_1$$

其中

$$f_1 = f, x \in [-1,0); f_2 = f, x \in (0,1); g_1 = g, x \in [-1,0); g_2 = g, x \in (0,1).$$

在线性空间 $H = H_1 \oplus \mathbb{C}$ 中定义内积:

$$< F, G >= \theta p_1^2 \int_{-1}^{0} f(x)\overline{g(x)}dx + \rho p_2^2 \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx + \frac{\theta}{\alpha} f_0 \bar{g}_0$$

其中

$$\{F = (f(x),\ f_0) \in H : f(x) \in H_1,\ f_0 \in \mathbb{C}\}$$

则 H 是一个 Hilbert 空间.

为了简便记:

$$B_{-1}y = \alpha_{21}y(-1) - \alpha_{22}y'(-1), \quad B'_{-1}y = \alpha_{11}y(-1) - \alpha_{12}y'(-1).$$

在空间 H 中定义算子 T, 其定义域为

$$\begin{aligned} D(T) = \{Y \in H : y(x),\ y'(x) \in AC_{loc}((-1,0)), y(x), y'(x) \in AC_{loc}((0,1)), \\ Ly \in H_1, y(0\pm), y'(0\pm) \text{是有限}, \\ L_i y = 0, i = 1,2,3,4, y_0 = B'_{-1}y\}. \end{aligned}$$

令 $TY=(Ty,\ B_{-1}y)$, 则问题 (3.1.1)-(3.1.5) 可以写成:

$$TY=\lambda Y,$$

其中 $Ty=Ly,\ Y=(y(x),\ B'_{-1}y)\in D(T),\ y\in H_1$.

于是, 我们可以在 Hilbert 空间 H 中通过方程 $TY=\lambda Y$ 来研究问题 (3.1.1)-(3.1.5), 显然, 我们有

定理 3.2.1 *问题 (3.1.1)-(3.1.5) 的特征值与算子 T 的特征值是一致的, 其特征函数是算子 T 的相应特征函数的第一个分量.*

定义 3.2.1 *我们把 $W(f,g;x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$ 称为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的 Wronsky 行列式. 特别地, 我们把 $p_2^2[f\bar{g}](1)$ 记作为 $W(f,g)(1)$.*

定理 3.2.2 *算子 T 是 Hilbert 空间 H 中的自伴算子.*

证明 本定理的证明分以下三个部分:

(1) 由定理 4.0.7[105] 易知, $D(T)$ 在 H 中是稠密的.

(2) 下面证明 T 在 H 中是对称的.

对于任意的 $F,G\in D(T)$, 有

$$<TF,G>=\theta p_1^2\int_{-1}^{0}(Tf(x))\overline{g(x)}dx+\rho p_2^2\int_{0}^{1}(Tf(x))\overline{g(x)}dx+\frac{\theta}{\alpha}B_{-1}f\overline{B'_{-1}g}.$$

由分部积分可得,

$$p_1^2\int_{-1}^{0}(Tf(x))\overline{g(x)}dx=p_1^2\int_{-1}^{0}f(x)\overline{Tg(x)}dx+W(f,\bar{g};0-)-W(f,\bar{g};-1)$$

$$p_2^2\int_{0}^{1}(Tf(x))\overline{g(x)}dx=p_2^2\int_{0}^{1}f(x)\overline{Tg(x)}dx)+W(f,\bar{g};1)-W(f,\bar{g};0+)$$

因此,

$$<TF,G>=<F,TG>+\theta W(f,\bar{g})|_{-1}^{0-}+\rho W(f,\bar{g})|_{0+}^{1}+\frac{\theta}{\alpha}(B_{-1}f\overline{B'_{-1}g}-B'_{-1}f\overline{B_{-1}g}).\quad(3.2.1)$$

由定义 3.2.1 和转移条件 (3.1.4)-(3.1.5) 知,

$$W(f,\bar{g};0+)=\frac{\theta}{\rho}W(f,\bar{g};0-).\quad(3.2.2)$$

由边界条件 (3.1.2)-(3.1.3) 和引理 2.2.11 可得,

$$B_{-1}f\overline{B'_{-1}g}-B'_{-1}f\overline{B_{-1}g}=\alpha W(f,\bar{g};-1),\quad W(f,\bar{g};1)=0 \tag{3.2.3}$$

将式 (3.2.2)-(3.2.3) 代入式 (3.2.1) 中, 得

$$<TF,G>=<F,TG>.$$

(3) 接下来证明 T 在 H 中是自伴的.

要证 T 在 H 中是自伴的, 只需证明对于任意的 $F\in D(T)$, 若 $<TF,G>=<F,W>$, 则 $G\in D(T)$ 且 $TG=W$, 其中 $G=(g(x),h)^T$, $W=(w(x),k)^T$, 即:

(I) $g_1,\ g_1'\in AC_{loc}([-1,0)),\quad g_2,\ g_2'\in AC_{loc}((0,1)),\quad Lg\in H_1;$

(II) $h=B'_{-1}g;$

(III) $L_2g=L_3g=L_4g=0;$

(IV) $w(x)=Lg;$

(V) $k=B_{-1}g.$

对于任意的 $F\in H_1\oplus 0\subset D(T)$, 由 $<TF,G>=<F,W>$, $(Lf,g)=(f,w)$ 和经典的 Sturm-Liouville 理论可知, (I)和(IV)成立.

由(IV)及任意的 $F\in D(T)$, $<TF,G>=<F,W>$ 等价于

$$(Tf,g)+\frac{\theta}{\alpha}\bar{h}B_{-1}f=(f,Tg)+\frac{\theta}{\alpha}\bar{k}B'_{-1}f. \tag{3.2.4}$$

由分部积分得,

$$(Tf,g)=(f,Tg)+\theta W(f,\bar{g})|_{-1}^{0-}+\rho W(f,\bar{g})|_{0+}^{1}. \tag{3.2.5}$$

将式 (3.2.5) 代入式 (3.2.1) 得,

$$\frac{\theta}{\alpha}\bar{k}B'_{-1}f=\theta W(f,\bar{g})|_{-1}^{0-}+\rho W(f,\bar{g})|_{0+}^{1}+\frac{\theta}{\alpha}\bar{h}B_{-1}f \tag{3.2.6}$$

由 Naimark 补缀引理知, 存在 $F\in D(T)$, 使得

$$[fy_1](1)=[fy_2](1)=f(0\pm)=f'(0\pm)=0,\ f(-1)=\alpha_{12},\ f'(-1)=\alpha_{11}$$

将上式代入式 (3.2.6) 中可得, (II)成立. 同理可得, (V)成立.

由 Naimark 补缀引理知, 存在 $F \in D(T)$, 使得

$$f(0\pm) = f'(0\pm) = f(-1) = f'(-1) = 0,\ [fy_1](1) = b[y_1 y_2],\ [fy_2](1) = -a[y_1 \bar{y_2}]$$

将上式代入式 (3.2.6) 得, $L_2 g = 0$. 同理可得, $L_i g = 0, i = 3, 4$.

综上所述, T 在 H 中是自伴的. □

推论 3.2.1 问题 (3.1.1)-(3.1.5) 的特征值是实的, 且若 λ_1, λ_2 是它的两个不同的特征值, 其相应的特征函数分别是 $u(x)$, $v(x)$, 则在内积 $< \cdot, \cdot >_H$ 下是正交的, 即:

$$\theta p_1^2 \int_{-1}^{0} u(x)\overline{v(x)}dx + \rho p_2^2 \int_{0}^{1} u(x)\overline{v(x)}dx + \frac{\theta}{\alpha} B'_{-1} u \overline{B'_{-1} v} = 0.$$

3.3 特征值的性质

引理 3.3.1 [103] 若 $q(x)$ 是区间 (a, b) 上的实值函数, $f(\lambda), g(\lambda)$ 是给定的整函数, 则对于任意的 $\lambda \in C$, 方程

$$Ly := -(p(x)y')' + q(x)y = \lambda y,\ x \in I = (a, b)$$

存在满足如下初值条件的唯一解 $y = y(x, \lambda)$:

$$u(a) = f(\lambda), \quad u'(a) = g(\lambda)$$

且对于 $x \in I$, $y(x, \lambda)$ 是关于 λ 的整函数.

令 $\phi_{1\lambda} := \phi_1(x, \lambda)$ 是方程 (3.1.1) 满足初值条件

$$y(-1) = -\alpha_{22} + \lambda\alpha_{12}, \qquad y'(-1) = -\alpha_{21} + \lambda\alpha_{11}$$

的解, 则我们可以得到方程 (3.1.1) 满足初值条件

$$\rho_{11} y(0+) + \rho_{12} y'(0+) = \theta_{11}\phi_1(0-, \lambda) + \theta_{12}\phi'_1(0-, \lambda),$$
$$\rho_{21} y(0+) + \rho_{22} y'(0+) = \theta_{21}\phi_1(0-, \lambda) + \theta_{22}\phi'_1(0-, \lambda)$$

的唯一解 $\phi_{2\lambda}(x) := \phi_2(x,\lambda)$. 因此, 在区间 $I = [-1,0)\cup(0,1)$ 上定义函数:

$$\phi(x,\lambda) = \begin{cases} \phi_1(x,\lambda), & x\in[-1,0); \\ \phi_2(x,\lambda), & x\in(0,1). \end{cases}$$

显然, $\phi(x,\lambda)$ 满足边界条件 (3.1.2) 和转移条件 (3.1.4)-(3.1.5).

同理, 我们可以定义函数:

$$\chi(x,\lambda) = \begin{cases} \chi_1(x,\lambda), & x\in[-1,0); \\ \chi_2(x,\lambda), & x\in(0,1) \end{cases}$$

使其满足边界条件 (3.1.3) 和转移条件 (3.1.4)-(3.1.5).

我们把上面定义的两个函数 $\phi(x,\lambda),\chi(x,\lambda)$ 称为方程 (3.1.1) 在区间 $I = [-1,0)\cup(0,1)$ 上的两个基本解.

下面将用到的记号:

$$\begin{aligned}
l_1y &:= \lambda(\alpha_{11}y(-1) - \alpha_{12}y'(-1)) - (\alpha_{21}y(-1) - \alpha_{22}y'(-1)) \\
l_2y &:= a[yy_1](1) + b[yy_2](1)) \\
l_3y &:= \rho_{11}y(0+) + \rho_{12}y'(0+) - \theta_{11}y(0-) - \theta_{12}y'(0-) \\
l_4y &:= \rho_{21}y(0+) + \rho_{22}y'(0+) - \theta_{21}y(0-) - \theta_{22}y'(0-) \\
W(\lambda) &= \begin{vmatrix} l_1\phi_1 & l_1\chi_1 & l_1\phi_2 & l_1\chi_2 \\ l_2\phi_1 & l_2\chi_1 & l_2\phi_2 & l_2\chi_2 \\ l_3\phi_1 & l_3\chi_1 & l_3\phi_2 & l_3\chi_2 \\ l_4\phi_1 & l_4\chi_1 & l_4\phi_2 & l_4\chi_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

由于 Sturm-liouville 问题的 Wronsky 行列式 $W(\phi_i,\chi_i;x)$ 是不依赖于 $x\in I$, 因此, 函数 $\omega_i := W(\phi_i,\chi_i;x)$ 是 λ 的整函数. 从而, 我们有

定理 3.3.1 对于任意的 $\lambda\in C$, $\omega_2(\lambda) = \frac{\theta}{\rho}\omega_1(\lambda)$.

证明 由于 Wronsky 行列式 $W(\phi_2,\chi_2;x)$ 是不依赖于 $x\in I$的, 因此,

$$\omega_2(\lambda) = \omega_2(\lambda)|_{x=0} = \begin{vmatrix} \phi_2(0+) & \chi_2(0+) \\ \phi_2'(0+) & \chi_2'(0+) \end{vmatrix}$$

由转移条件 (3.1.4)-(3.1.5) 知,

$$\omega_2(\lambda)=\frac{\theta}{\rho}\begin{vmatrix}\phi_1(-0) & \chi_1(-0)\\ \phi_1'(-0) & \chi_1'(-0)\end{vmatrix}=\frac{\theta}{\rho}\omega_1(\lambda).$$

□

定理 3.3.2 对于任意的 $\lambda\in C$, $W(\lambda)=\frac{\theta^2}{\rho}\omega_1^3(\lambda)$.

证明 由 $\phi_i(x,\lambda),\chi_i(x,\lambda)(i=1,2)$ 和 $W(\lambda)$ 的定义知,

$$\begin{aligned}W(\lambda)&=-\omega_1(\lambda)\omega_2(\lambda)\begin{vmatrix}-(\theta_{11}\phi_1(-0)+\theta_{12}\phi_1'(-0)) & \rho_{11}\chi_2(+0)+\rho_{12}\chi_2'(+0)\\ -(\theta_{21}\phi_1(-0)+\theta_{22}\phi_1'(-0)) & \rho_{21}\chi_2(+0)+\rho_{22}\chi_2'(+0)\end{vmatrix}\\ &=\omega_1(\lambda)\omega_2(\lambda)\begin{vmatrix}\theta_{11}\phi_1(-0)+\theta_{12}\phi_1'(-0) & \theta_{11}\chi_1(-0)+\theta_{12}\chi_1'(-0)\\ \theta_{21}\phi_1(-0)+\theta_{22}\phi_1'(-0) & \theta_{21}\chi_1(-0)+\theta_{22}\chi_1'(-0)\end{vmatrix}\\ &=\frac{\theta^2}{\rho}\omega_1^3(\lambda).\end{aligned}$$

□

由定理 3.3.1 知, $\omega_2(\lambda)$ 的零点与 $\omega_1(\lambda)$ 的零点是一致的, 因此, 我们把函数

$$\omega(\lambda):=\omega_1(\lambda)=\frac{\rho}{\theta}\omega_2(\lambda),$$

称为问题 (3.1.1)-(3.1.5) 的判别函数.

定理 3.3.3 问题 (3.1.1)-(3.1.5) 的特征值与判别函数 $\omega(\lambda)$ 的零点是一致的.

证明 首先证明判别函数 $\omega(\lambda)$ 的零点是问题 (3.1.1)-(3.1.5) 的特征值.

若 $\omega(\lambda_0)=0$, 则 $\omega_1(\lambda_0)=0$. 因此, 函数 $\phi_{2\lambda_0}(x),\chi_{2\lambda_0}(x)$ 是线性相关的, 即

$$\phi_{2\lambda_0}(x)=k\chi_{2\lambda_0}(x), x\in(c,b), k\neq 0\in R.$$

由 $\chi_{2\lambda_0}(x)$ 满足边界条件 (3.1.3) 知, $\phi_{2\lambda_0}(x)$ 满足边界条件 (3.1.3). 故 $\phi(x,\lambda)$ 是对应于 λ_0 的特征函数, 即 λ_0 是问题 (3.1.1)-(3.1.5) 的特征值.

接着证明问题 (3.1.1)-(3.1.5) 的特征值是判别函数 $\omega(\lambda)$ 的零点.

若 λ_0 是问题 (3.1.1)-(3.1.5) 的任一特征值, 则 $\omega(\lambda_0)=0$. 下面利用反证法证明, 不妨假设 λ_0 是问题 (3.1.1)-(3.1.5) 的特征值, 而 $\omega(\lambda_0)\neq 0$.

设 $u_0(x,\lambda_0)$ 是对应于特征值 λ_0 的任一特征函数, 则 $u_0(x,\lambda_0)$ 可以表成

$$u_0(x,\lambda_0)=\begin{cases} d_1\phi_1(x,\lambda_0)+e_1\chi_1(x,\lambda_0), & x\in[a,c);\\ d_2\phi_2(x,\lambda_0)+e_2\chi_2(x,\lambda_0), & x\in(c,b), \end{cases}$$

其中 d_1,d_2,e_1,e_2 至少有一个不为零.

由于 $u_0(x,\lambda_0)$ 是对应于特征值 λ_0 的特征函数, 因此, $u_0(x,\lambda_0)$ 满足边界条件 (3.1.2)-(3.1.3) 和转移条件 (3.1.4)-(3.1.5), 即

$$L_iu_0(x,\lambda_0)=0,\ i=1,2,3,4.$$

由 $\omega(\lambda_0)\neq 0$ 知, 上面方程组的系数矩阵的行列式 $W(\lambda_0)=\frac{\theta^2}{\rho}\omega^3(\lambda_0)\neq 0$. 因此, $d_1=d_2=e_1=e_2=0$, 这与 d_1,d_2,e_1,e_2 至少有一个不为零矛盾, 故 $\omega_1(\lambda_0)=0$, 即 $\omega(\lambda_0)=0$. □

定理 3.3.4 *问题* (3.1.1)-(3.1.5)*的实特征值是下方有界的.*

证明 本定理的证明见下节注3.4.1. □

3.4 特征值的渐近公式

定理 3.4.1 *令 $\lambda=s^2$, $s=\sigma+it$, 则问题* (3.1.1)-(3.1.5) *的基本解 $\phi(x,\lambda)$ 满足如下积分方程:*

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{dx^k}\phi_{1\lambda}(x)&=(-\alpha_{22}+s^2\alpha_{12})\frac{d^k}{dx^k}\cos p_1s(x+1)+\frac{1}{p_1s}(-\alpha_{21}+s^2\alpha_{11})\frac{d^k}{dx^k}\sin p_1s(x+1)\\&\quad+\frac{p_1}{s}\int_{-1}^{x}\frac{d^k}{dx^k}\sin[p_1s(x-\xi)]q(\xi)\phi_{1\lambda}(\xi)d\xi;\\ \frac{d^k}{dx^k}\phi_{2\lambda}(x)&=\frac{(\rho_{22}\theta_{11}-\rho_{12}\theta_{21})\phi_{1\lambda}(-0)+(\rho_{22}\theta_{12}-\rho_{12}\theta_{22})\phi'_{1\lambda}(-0)}{\rho}\frac{d^k}{dx^k}\cos p_2sx\\&\quad+\frac{(\rho_{11}\theta_{21}-\rho_{21}\theta_{11})\phi_{1\lambda}(-0)+(\rho_{11}\theta_{22}-\rho_{21}\theta_{12})\phi'_{1\lambda}(-0)}{p_2\rho s}\frac{d^k}{dx^k}\sin p_2sx\\&\quad+\frac{p_2}{s}\int_{0}^{x}\frac{d^k}{dx^k}[\sin p_2s(x-\xi)]q(\xi)\phi_{2\lambda}(\xi)d\xi.\end{aligned}$$

其中 $k=0,1$.

证明 由于 $\phi_{1\lambda}(x)$ 是如下初值问题的解

$$\begin{cases} -(p(x)y')' + q(x)y = \lambda y, & x \in [-1, 0) \\ y(-1) = -\alpha_{22} + \lambda\alpha_{12}, \\ y'(-1) = -\alpha_{21} + \lambda\alpha_{11}, \end{cases}$$

因此, 我们可以把 $\phi_{1\lambda}(x)$ 看成如下 Cauchy 问题的解:

$$\begin{cases} (p(x)y')' + s^2 y = q(x)\phi_{1\lambda}(x,\lambda), & x \in [-1, 0) \\ y(-1) = -\alpha_{22} + \lambda\alpha_{12}, \\ y'(-1) = -\alpha_{21} + \lambda\alpha_{11}. \end{cases}$$

应用常数变易法可得,

$$\phi_{1\lambda}(x) = (-\alpha_{22} + s^2\alpha_{12})\cos p_1 s(x+1) + \frac{1}{p_1 s}(-\alpha_{21} + s^2\alpha_{11})\sin p_1 s(x+1) + \frac{p_1}{s}\int_{-1}^{x} \sin p_1 s(x-\xi) q(\xi)\phi_{1\lambda}(\xi)d\xi.$$

对上式求导可得,

$$\phi'_{1\lambda}(x) = -(-\alpha_{22} + s^2\alpha_{12})p_1 s \sin p_1 s(x+1) + (-\alpha_{21} + s^2\alpha_{11})\cos p_1 s(x+1) + p_1^2\int_{-1}^{x} \cos p_1 s(x-\xi) q(t)\phi_{1\lambda}(\xi)d\xi.$$

由 $\phi_{2\lambda}(x)$ 是如下初值问题的解

$$\begin{cases} py'' + s^2 y = q(x)\phi_{2\lambda}(x), \ x \in (0, 1) \\ \rho_{11}y(+0) + \rho_{12}y'(+0) = \theta_{11}\phi_{1\lambda}(-0) + \theta_{12}\phi'_{1\lambda}(-0) \\ \rho_{21}y(+0) + \rho_{22}y'(+0) = \theta_{21}\phi_{1\lambda}(-0) + \theta_{22}\phi'_{1\lambda}(-0) \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} \phi_{2\lambda}(x) = & \frac{(\rho_{22}\theta_{11} - \rho_{12}\theta_{21})\phi_{1\lambda}(-0) + (\rho_{22}\theta_{12} - \rho_{12}\theta_{22})\phi'_{1\lambda}(-0)}{\rho}\cos p_2 s x \\ & + \frac{(\rho_{11}\theta_{21} - \rho_{21}\theta_{11})\phi_{1\lambda}(-0) + (\rho_{11}\theta_{22} - \rho_{21}\theta_{12})\phi'_{1\lambda}(-0)}{p_2\rho s}\sin p_2 s x \\ & + \frac{p_2}{s}\int_{0}^{x} \sin p_2 s(x-\xi) q(\xi)\phi_{2\lambda}(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

对上式求导可得,

$$
\begin{aligned}
\phi_{2\lambda}'(x) = & -\frac{p_2 s}{\rho}[(\rho_{22}\theta_{11} - \rho_{12}\theta_{21})\phi_{1\lambda}(-0) + (\rho_{22}\theta_{12} - \rho_{12}\theta_{22})\phi_{1\lambda}'(-0)] \sin p_2 sx \\
& + \frac{1}{\rho}[(\rho_{11}\theta_{21} - \rho_{21}\theta_{11})\phi_{1\lambda}(-0) + (\rho_{11}\theta_{22} - \rho_{21}\theta_{12})\phi_{1\lambda}'(-0)] \cos p_2 sx \\
& + p_2^2 \int_0^x \cos p_2 s(x-\xi) q(\xi) \phi_{2\lambda}(\xi) d\xi.
\end{aligned}
$$

□

定理 3.4.2 令 $\lambda = s^2$, $s = \delta + it$, 则当 $|\lambda| \to \infty$ 时, 函数 $\phi_{i\lambda}(x)(x = 1, 2)$ 具有如下渐近式, 并且对于 $x \in I = [-1, 0) \cup (0, 1]$ 是一致成立的:

(1) 当 $\alpha_{12} \neq 0$ 时,

$$
\begin{aligned}
\frac{d^k}{dx^k}\phi_{1\lambda}(x) &= \alpha_{12} s^2 \frac{d^k}{dx^k} \cos p_1 s(x+1) + O(|s|^{k+1} e^{|t|p_1(x+1)}), \\
\frac{d^k}{dx^k}\phi_{2\lambda}(x) &= \frac{\alpha_{12}}{\rho}(\rho_{12}\theta_{22} - \rho_{22}\theta_{12}) p_1 s^3 \sin p_1 s \frac{d^k}{dx^k} \cos p_2 sx + O(|s|^{k+2} e^{|t|(p_1+p_2 x)}), k = 0, 1.
\end{aligned}
$$

(2) 当 $\alpha_{12} = 0$ 时,

$$
\begin{aligned}
\frac{d^k}{dx^k}\phi_{1\lambda}(x) &= \frac{\alpha_{11}}{p_1} s \frac{d^k}{dx^k} \sin p_1 s(x+1) + O(|s|^k e^{|t|p_1(x+1)}), \\
\frac{d^k}{dx^k}\phi_{2\lambda}(x) &= \frac{\alpha_{11}}{\rho}(\rho_{22}\theta_{12} - \rho_{12}\theta_{22}) s^2 \cos p_1 s \frac{d^k}{dx^k} \cos p_2 sx + O(|s|^{k+1} e^{|t|(p_1+p_2 x)}), k = 0, 1.
\end{aligned}
$$

证明 应用 Titchmarsh 引理易得 $\phi_{1\lambda}$ 的渐近公式. 下面给出 $\phi_{2\lambda}$ 的渐近公式, 其中 $\phi_{2\lambda}$ 是满足如下初值问题的解:

$$
\begin{aligned}
\rho_{11} y(+0) + \rho_{12} y'(+0) &= \theta_{11} y(-0) + \theta_{12} y'(-0), \\
\rho_{21} y(+0) + \rho_{22} y'(+0) &= \theta_{21} y(-0) + \theta_{22} y'(-0).
\end{aligned}
$$

将 $\alpha_{12} \neq 0$ 时 $\phi_{1\lambda}$ 的渐近式代入上式并注意到$|\sin z| = O(e^{|Imz|})$, $|\sin z| = O(e^{|Imz|})$ 可得,

$$
\begin{aligned}
\phi_{2\lambda}(x) = & \frac{\alpha_{12}}{\rho}[(\rho_{22}\theta_{11} - \rho_{12}\theta_{21}) s^2 \cos p_1 s - (\rho_{22}\theta_{12} - \rho_{12}\theta_{22}) p_1 s^3 \sin p_1 s] \cos p_2 sx \\
& + \frac{\alpha_{12}}{p_2 \rho}[(\rho_{11}\theta_{21} - \rho_{21}\theta_{11}) s \cos p_1 s - (\rho_{11}\theta_{21} - \rho_{21}\theta_{11}) p_1 s^2 \sin p_1 s] \sin p_2 sx \\
& + \frac{p_2}{s} \int_0^x \sin p_2 s(x-\xi) q(\xi) \phi_{2\lambda}(\xi) d\xi + O(|s|^2 e^{|t|(p_1+p_2 x)})
\end{aligned}
\tag{3.4.1}
$$

令 $\phi_{2\lambda}=|s|^3e^{|t|(p_1+p_2x)}F(x,\lambda)$, 则 $F(x,\lambda)=|s|^{-3}e^{-|t|(p_1+p_2x)}\phi_{2\lambda}$.

记 $M(\lambda)=\max\limits_{x\in[0,1]}|F(x,\lambda)|$, 则

$$M(\lambda)\le M_0(|(\rho_{22}\theta_{12}-\rho_{12}\theta_{22})p_1|+\frac{1}{|s|}).$$

因此, 当 $|\lambda|\to\infty$ 时, $M(\lambda)=O(1)$, 即$\phi_{2\lambda}(x)=O(|s|^3e^{|t|(p_1+p_2x)})$ $(|\lambda|\to\infty)$, 并将其代入(3.4.1) 中可得(1) 中 $k=0$ 情形关于 $\phi_{2\lambda}$ 的结论.

同理, 应用与 (1)中 $k=0$ 的情形相同的过程, 我们可以得到其他相关的结论. □

应用与定理 3.4.1 的相同的过程, 我们得

定理 3.4.3 令 $\lambda=s^2$, $s=\delta+it$, 则当 $|\lambda|\to\infty$ 时, 函数 $\chi_{i\lambda}(x)(x=1,2)$ 具有如下渐近式, 并且对于 $x\in I=[-1,0)\cup(0,1]$ 是一致成立的:

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{dx^k}\chi_{1\lambda}(x)&=\frac{bp_2}{\theta}(\rho_{12}\theta_{22}-\rho_{22}\theta_{12})s\sin p_2s\frac{d^k}{dx^k}\cos p_1sx+O(|s|^ke^{|t|(p_2+p_1x)}),\\ \frac{d^k}{dx^k}\chi_{2\lambda}(x)&=b\frac{d^k}{dx^k}\cos p_2s(x-1)+O(|s|^{-1+k}e^{|t|p_2(1-x)}).\end{aligned}$$

其中$k=0,1$.

定理 3.4.4 令 $\lambda=s^2$, $s=\delta+it$, 则当 $|\lambda|\to\infty$ 时, 判别函数 $\omega(\lambda)$ 具有如下渐近式:

(1) 当 $\alpha_{12}\neq 0$ 时,

$$\omega(\lambda)=\frac{\alpha_{12}bp_1p_2}{\theta}(\rho_{12}\theta_{22}-\rho_{22}\theta_{12})s^4\sin p_1s\sin p_2s+O(|s|^3e^{|t|(p_1+p_2)});$$

(2) 当 $\alpha_{12}=0$ 时,

$$\omega(\lambda)=-\frac{\alpha_{11}bp_2}{\theta}(\rho_{12}\theta_{22}-\rho_{22}\theta_{12})s^3\cos p_1s\sin p_2s+O(|s^2|e^{|t|(p_1+p_2)}).$$

证明 将定理 3.4.2 和定理 3.4.3 中关于 $\phi_{i\lambda}(x),\chi_{i\lambda}(x)(x=1,2)$ 的渐近公式代入 $\omega(\lambda)$ 中即可得到本定理的结论, 这里不再赘述. □

注 3.4.1 (定理3.3.5的证明)

证明 令 $s=it\,(t>0)$ 并将其代入 $\omega(\lambda)$ 中可得, 当 $t\to\infty$ 时, $\omega(\lambda)=\omega(-t^2)\to\infty$. 因此, 当 $\lambda=-t^2$ 充分小时, $\omega(\lambda)\neq 0$, 这就说明实特征值是下方有界的. □

定理 3.4.5 问题 (3.1.1)-(3.1.5) 的特征值至多有可数多个, 且当 $n\to\infty$ 时, 其特征值渐近式有如下两类:

(1) 当 $\alpha_{12}\neq 0$ 时,

$$\sqrt{\lambda_n'}=\frac{n-1}{p_1}\pi+O(\frac{1}{n}) \text{ 或} \sqrt{\lambda_n''}=\frac{n-1}{p_2}\pi+O(\frac{1}{n}).$$

(2) 当 $\alpha_{12}=0$ 时,

$$\sqrt{\lambda_n'}=\frac{n-\frac{1}{2}}{p_1}\pi+O(\frac{1}{n}) \text{ 或} \sqrt{\lambda_n''}=\frac{n-\frac{1}{2}}{p_2}\pi+O(\frac{1}{n}).$$

证明 (1) 当 $\alpha_{12}\neq 0$ 时, 令 $\omega(\lambda)=\omega^*(\lambda)+\alpha(\lambda)$, 则

$$\alpha(\lambda)=O(|s|^3e^{|t|(p_1+p_2)}),$$
$$\omega^*(\lambda)=\frac{\alpha_{12}bp_1p_2}{\theta}(\rho_{12}\theta_{22}-\rho_{22}\theta_{12})s^4\sin p_1s\sin p_2s.$$

下面我们应用熟知的 Rouché 定理, 即若 $f(s),g(s)$ 在封闭曲线 $\Gamma_n=\Gamma_n'\cup\Gamma_n''$:

$$\Gamma_n'=\{\lambda=s^2|\ |\sigma|=\frac{n+\frac{1}{2}}{p_1}\pi,\ 0\leq t\leq\frac{n}{p_1}\pi\},$$
$$\Gamma_n''=\{\lambda=s^2|\ |\sigma|\leq\frac{n+\frac{1}{2}}{p_1}\pi,\ t=\frac{n}{p_1}\pi\}$$

内解析, 且 $f(s)<g(s)$, 则 $f(s)$, $g(s)+f(s)$ 在封闭曲线 Γ_n 内具有相同个数的零点. 显然, 在曲线 Γ_n 内, 有 $\omega^*(\lambda)>\alpha(\lambda)$.

设 $\lambda_0\leq\lambda_1\leq\cdots$ 是 $\omega(\lambda)=\omega^*(\lambda)+\alpha(\lambda)$ 的零点, 且 $\lambda_n=s_n^2$. 不妨假设在曲线 Γ_n 内, 有 $\sin p_2s\neq 0$, 则在 Γ_n 内部 $\omega^*(\lambda)$ 的零点是 $0,(\frac{\pi}{p_1})^2,(\frac{2\pi}{p_1})^2,\ldots,(\frac{n\pi}{p_1})^2$, 其个数为 $n+1$. 因此, 在 $[-(n+\frac{1}{2})^2,(n+\frac{1}{2})^2]$ 内, $\omega(\lambda)$ 有且仅有 $n+1$ 个零点, 这说明 $\omega(\lambda)$ 有且仅有可数个孤立的零点.

令 $\sqrt{\lambda_n'}=\frac{n-1}{p_1}\pi+\delta_n$, $|\delta_n|<\frac{\pi}{2p_1}$, 则当 $n\to\infty$ 时, 将 $\sqrt{\lambda_n'}$代入$\omega(\lambda)$ 中, 得$\sin p_1\delta_n=O(\frac{1}{n})$. 从而, $p_1\delta_n=O(\frac{1}{n})$, 即 $\delta_n=O(\frac{1}{n})$. 故 $\sqrt{\lambda_n'}=\frac{n-1}{p_1}\pi+O(\frac{1}{n})$.

同理, 我们可以得到第二类特征值的渐近公式为

$$\sqrt{\lambda_n''}=\frac{n-1}{p_2}\pi+O(\frac{1}{n}).$$

综上所述得:

当 $\alpha_{12}\neq 0$ 时, 问题 (3.1.1)-(3.1.5) 的特征值的渐近式为

$$\sqrt{\lambda_n'}=\frac{n-1}{p_1}\pi+O(\frac{1}{n}) \text{ 或} \sqrt{\lambda_n''}=\frac{n-1}{p_2}\pi+O(\frac{1}{n}).$$

(2) 应用与上面相同的过程, 我们可得情形(2)的结论. □

第四章　两个边界条件含特征参数的不连续奇异 Sturm-Liouville 问题

在前一章的基础之上, 进一步研究两个边界条件中都含特征参数且在区间内部具有一个不连续点的奇异 Sturm-Liouville 问题, 通过构造一个新 Hilbert 空间, 把所研究的问题转换成此空间下相应的算子问题, 得到了该算子是自伴算子; 通过给定的边界条件, 将特征值问题转化为判别函数的零点问题, 得到了其特征值的相关性质; 通过其问题的基本解, 给出了其特征值的渐近公式.

4.1　基本问题

考虑对称微分方程

$$Ly := -(p(x)y')' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in I, \tag{4.1.1}$$

和依赖于特征参数的边界条件

$$L_1 y := \lambda(\alpha_{11}y(a) - \alpha_{12}y'(a)) - (\alpha_{21}y(a) - \alpha_{22}y'(a)) = 0, \tag{4.1.2}$$

$$L_2 y := \lambda(\beta_{11}[yy_1](b) - \beta_{12}[yy_2](b) + (\beta_{21}[yy_1](b) - \beta_{22}[yy_2](b) = 0, \tag{4.1.3}$$

及在内部 $c \in (a,b)$ 处具有转移条件

$$L_3 y := y(c+) - \gamma_{11}y(c-) - \gamma_{12}y'(c-) = 0 \tag{4.1.4}$$

$$L_4 y := y'(c+) - \gamma_{21}y(c-) - \gamma_{22}y'(c-) = 0 \tag{4.1.5}$$

所生成的微分算子的渐近分析, 其中 $I = [a,c) \cup (c,b)$, $p(x) = 1/p_1^2, x \in [a,c)$, $p(x) = 1/p_2^2, x \in (c,b)$ 是正实数; $q(x) \in L^1(I,R)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ 是复特征参数; 系数 $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_{ij} \in R, i,j = 1,2$. 极限 $y(c\pm) = \lim\limits_{x \to c\pm 0} y(x)$ 是有限的. 设 y_1, y_2 是方程 $-(p(x)y')' + q(x)y = 0$ 的两个线性无关解且满足 $[y_1y_2](b) = 1$.

本章假设 Ly 在 $x=b$ 处是极限圆型的且式 (4.1.2)-(4.1.5) 中的系数满足

$$\alpha=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}>0,\ \beta=\begin{vmatrix}\beta_{11} & \beta_{12}\\ \beta_{21} & \beta_{22}\end{vmatrix}>0,\ \gamma=\begin{vmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22}\end{vmatrix}>0.$$

注 4.1.1 由于 Ly 在点 $x=b$ 处是极限圆型的, 则由引理 2.2.9 和引理 2.2.10 知, $\int_c^b \bar{y_1}Lydx$, $\int_c^b y\overline{L^*y_1}dx$ 和 $[yy_1](c)$ 是存在的, 故 $[yy_1](b)$ 存在. 同理, $[yy_2](b)$ 存在. 因此, 边界条件 (4.1.3) 的给出是有意义的.

4.2 问题的自伴性

在区间 I 上平方可积的复值可测函数全体组成的空间 $H_1=L^2(I)$ 中定义如下内积

$$<f,g>_{H_1}=\gamma p_1^2\int_a^c f(x)\overline{g(x)}dx+p_2^2\int_c^b f(x)\overline{g(x)}dx,\ \forall f,\ g\in L^2(I),$$

其中

$$f_1(x)=f(x)|_{x\in[a,c)},f_2(x)=f(x)|_{x\in(c,b)}.$$

在线性空间 $H=H_1\oplus C^2$ 中定义内积:

$$<F,G>_H=<f,g>_{H_1}+\frac{\gamma}{\alpha}f_0\bar{g_0}+\frac{1}{\beta}f_{00}\bar{g_{00}},$$

其中

$$F=(f,f_0,f_{00}),G=(g,g_0,g_{00})\in H,f_0,g_0,f_{00},g_{00}\in C,$$

则 H 是一个 *Hilbert* 空间.

为了简便记:

$$B_ay=\alpha_{21}y(a)-\alpha_{22}y'(a),\ B_a'y=\alpha_{11}y(a)-\alpha_{12}y'(a),$$
$$B_by=\beta_{21}[yy_1](b)-\beta_{22}[yy_2](b),\ B_b'y=\beta_{11}[yy_1](b)-\beta_{12}[yy_2](b).$$

在空间 H 中定义算子 T, 其定义域为

$$D(T)=\{F\in H: f_1(x),\ f_1'(x)\in AC_{loc}([a,c))f_2(x),f_2'(x)\in AC_{loc}((c,b)),$$
$$Lf\in H_1, f(c\pm),f'(c\pm)\text{是有限},$$
$$L_if=0,i=1,2,3,4,f_0=B_a'f,f_{00}=B_b'f\}.$$

令 $TY=(Ty,B_ay,B_by)$, 其中 $Ty=Ly$, 则问题 (4.1.1)-(4.1.5) 可以写成

$$TY=\lambda Y,$$

其中 $Y=(y,B'_ay,B'_by)$.

于是, 我们可以在 *Hilbert*空间 H 中通过方程 $TY=\lambda Y$ 来研究问题 (4.1.1)-(4.1.5), 显然, 我们有

定理 4.2.1 问题 (4.1.1)-(4.1.5) 的特征值与算子 T 的特征值是一致的, 其特征函数是算子T 的相应特征函数的第一个分量.

定义 4.2.1 我们把 $W(f,g;x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$ 称为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的 *Wronsky* 行列式. 特别地, 我们把 $p_2^2[f\bar{g}](b)$ 记作为 $W(f,g)(b)$.

定理 4.2.2 算子 T 是 Hilbert 空间 H 中的自伴算子.

证明 本定理的证明可以参看定理 3.2.2 的证明过程. □

推论 4.2.1 问题 (4.1.1)-(4.1.5) 的特征值是实的, 且若 λ_1,λ_2 是它的两个不同的特征值, 其相应的特征函数分别是 $u(x),v(x)$, 则在内积 $<\cdot,\cdot>_H$ 下是正交的, 即:

$$\gamma p_1^2\int_a^c u_1\overline{v_1}dx+p_2^2\int_c^b u_2\overline{v_2}dx+\frac{\gamma}{\alpha}B'_au\overline{B'_av}+\frac{1}{\beta}B_bu\overline{B_bv}=0.$$

4.3 特征值的性质

引理 4.3.1 [103] 若 $q(x)$是区间 (a,b) 上的实值函数, $f(\lambda),g(\lambda)$ 是给定的整函数, 则对于任意的 $\lambda\in C$, 方程

$$Ly:=-(p(x)y')'+q(x)y=\lambda y,\ x\in(a,b)$$

存在满足初值条件

$$y(a)=f(\lambda),\ y'(a)=g(\lambda),$$

的唯一解 $y=y(x,\lambda)$, 且对于 $x\in(a,b)$, $y(x,\lambda)$ 是关于 λ 的整函数.

令 $\phi_{1\lambda}:=\phi_1(x,\lambda)$ 是方程 (4.1.1) 满足初值条件

$$y(a)=-\alpha_{22}+\lambda\alpha_{12},y'(a)=-\alpha_{21}+\lambda\alpha_{11}$$

的解, 则我们可以得到方程 (4.1.1) 满足初值条件

$$y(c+) - \gamma_{11}y(c-) - \gamma_{12}y'(c-) = 0,$$
$$y'(c+) - \gamma_{21}y(c-) - \gamma_{22}y'(c-) = 0$$

的唯一解 $\phi_{2\lambda}$. 因此, 在区间 $I = [a,c) \cup (c,b)$ 上定义函数:

$$\phi(x,\lambda) = \begin{cases} \phi_{1\lambda}, & x \in [a,c); \\ \phi_{2\lambda}, & x \in (c,b). \end{cases}$$

显然, $\phi(x,\lambda)$ 满足边界条件 (4.1.2) 和转移条件 (4.1.4)-(4.1.5).

同理, 我们可以定义函数:

$$\chi(x,\lambda) = \begin{cases} \chi_{1\lambda}, & x \in [a,c); \\ \chi_{2\lambda}, & x \in (c,b). \end{cases}$$

使其满足边界条件 (4.1.3) 和转移条件 (4.1.4)-(4.1.5).

我们把上面定义的两个函数 $\phi(x,\lambda), \chi(x,\lambda)$ 称为方程 (4.1.1) 在区间 $I = [a,c) \cup (c,b)$ 上的两个基本解.

由于 Sturm-liouville 问题的 Wronsky 行列式 $W(\phi_i, \chi_i; x)$ 是不依赖于 $x \in I$, 因此, 函数 $\omega_i := W(\phi_i, \chi_i; x)$ 是 λ 的整函数. 从而, 我们有

定理 4.3.1 对于任意的 $\lambda \in C$, $\omega_2(\lambda) = \gamma_1\omega_1(\lambda)$.

证明 由于 Wronsky 行列式 $W(\phi_2, \chi_2; x)$ 是不依赖于 $x \in I$, 因此,

$$\begin{aligned} \omega_2(\lambda) = \omega_2(\lambda)|_{x=c+} &= \begin{vmatrix} \phi_2(+) & \chi_2(c+) \\ \phi_2'(+) & \chi_2'(c+) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \gamma_{11}\phi_1(c-) + \gamma_{12}\phi_1'(c-) & \gamma_{11}\chi_1(c-) + \gamma_{12}\chi_1'(c-) \\ \gamma_{21}\phi_1(c-) + \gamma_{22}\phi_1'(c-) & \gamma_{21}\chi_1(c-) + \gamma_{22}\chi_1'(c-) \end{vmatrix} \\ &= \gamma\omega_1(\lambda). \end{aligned}$$

□

由定理 4.3.1 知, $\omega_2(\lambda)$ 的零点与 $\omega_1(\lambda)$ 的零点是一致的, 因此, 我们把函数

$$\omega(\lambda) := \omega_2(\lambda) = \gamma\omega_1(\lambda),$$

称为问题 (4.1.1)-(4.1.5) 的判别函数.

定理 4.3.2 问题 (4.1.1)-(4.1.5) 的特征值恰好是判别函数 $\omega(\lambda)$ 的零点.

证明 *必要性* 若 $\omega(\lambda_0)=0$, 则 $\omega_1(\lambda_0)=0$. 因此, 函数 $\phi_{2\lambda_0}(x),\chi_{2\lambda_0}(x)$ 是线性相关的, 即

$$\phi_{2\lambda_0}(x)=k\chi_{2\lambda_0}(x),x\in(c,b),k\neq 0\in R.$$

由 $\chi_{2\lambda_0}(x)$ 满足边界条件 (4.1.3) 知, $\phi_{2\lambda_0}(x)$ 满足边界条件 (4.1.3). 故 $\phi(x,\lambda)$ 是对应于 λ_0 的特征函数, 即 λ_0 是问题 (4.1.1)-(4.1.5) 的特征值.

充分性 若 λ_0 是问题 (4.1.1)-(4.1.5) 的特征值, 则$\omega(\lambda_0)=0$. 下面利用反证法, 假设 λ_0 是问题 (4.1.1)-(4.1.5) 的特征值, 而 $\omega(\lambda_0)\neq 0$.

设$u_0(x,\lambda_0)$是对应于特征值λ_0 的任一特征函数, 则 $u_0(x,\lambda_0)$ 可以表成

$$u_0(x,\lambda_0)=\begin{cases} d_1\phi_1(x,\lambda_0)+e_1\chi_1(x,\lambda_0), & x\in[a,c);\\ d_2\phi_2(x,\lambda_0)+e_2\chi_2(x,\lambda_0), & x\in(c,b),\end{cases}$$

其中 d_1,d_2,e_1,e_2 至少有一个不为零.

由于 $u_0(x,\lambda_0)$ 是对应于特征值 λ_0 的特征函数, 因此, $u_0(x,\lambda_0)$ 满足边界条件 (4.1.2)-(4.1.3) 和转移条件 (4.1.4)-(4.1.5), 即

$$L_iu_0(x,\lambda_0)=0,\ i=1,2,3,4.$$

由 $\omega(\lambda_0)\neq 0$ 知, 上面方程组的系数矩阵的行列式 $W(\lambda_0)$:

$$\begin{aligned} W(\lambda_0)&=\begin{vmatrix} L_1\phi_1 & L_1\chi_1 & L_1\phi_2 & L_1\chi_2\\ L_2\phi_1 & L_2\chi_1 & L_2\phi_2 & L_2\chi_2\\ L_3\phi_1 & L_3\chi_1 & L_3\phi_2 & L_3\chi_2\\ L_4\phi_1 & L_4\chi_1 & L_4\phi_2 & L_4\chi_2\end{vmatrix}\\ &=\omega_1(\lambda_0)\omega_2(\lambda_0)\begin{vmatrix} \gamma_{11}\phi_1(-0)+\gamma_{12}\phi_1'(-0) & \chi_2(+0)\\ \gamma_{21}\phi_1(-0)+\gamma_{22}\phi_1'(-0) & \chi_2'(+0)\end{vmatrix}\\ &=\omega_1(\lambda_0)\omega_2(\lambda_0)\begin{vmatrix} \gamma_{11}\phi_1(-0)+\gamma_{12}\phi_1'(-0) & \gamma_{11}\chi_1(-0)+\gamma_{12}\chi_1'(-0)\\ \gamma_{21}\phi_1(-0)+\gamma_{22}\phi_1'(-0) & \gamma_{21}\chi_1(-0)+\gamma_{22}\chi_1'(-0)\end{vmatrix}\\ &=\gamma^2\omega^3(\lambda_0)\neq 0.\end{aligned}$$

因此, $d_1=d_2=e_1=e_2=0$, 这与 d_1,d_2,e_1,e_2 至少有一个不为零矛盾, 故 $\omega_1(\lambda_0)=0$. □

定理 4.3.3 问题 (4.1.1)-(4.1.5) 的特征值是下方有界的.

证明 本定理的证明见注 4.4.1. □

4.4 特征值的渐近公式

定理 4.4.1 令 $\lambda=s^2$, $s=\sigma+it$, 则问题 (4.1.1)-(4.1.5) 的基本解 $\phi(x,\lambda)$ 满足如下表达式:

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{dx^k}\phi_{1\lambda}(x)&=(-\alpha_{22}+s^2\alpha_{12})\frac{d^k}{dx^k}\cos p_1s(x-a)\\&+\frac{1}{p_1s}(-\alpha_{21}+s^2\alpha_{11})\frac{d^k}{dx^k}\sin p_1s(x-a)\\&+\frac{p_1}{s}\int_a^x\frac{d^k}{dx^k}\sin p_1s(x-\xi)q(\xi)\phi_{1\lambda}(\xi)d\xi;\\\frac{d^k}{dx^k}\phi_{2\lambda}(x)&=(\gamma_{11}\phi_{1\lambda}(c-)+\gamma_{12}\phi'_{1\lambda}(c-))\frac{d^k}{dx^k}\cos p_2s(x-c)\\&+\frac{1}{p_2s}(\gamma_{21}\phi_{1\lambda}(c-)+\gamma_{22}\phi'_{1\lambda}(c-))\frac{d^k}{dx^k}\sin p_2s(x-c)\\&+\frac{p_2}{s}\int_x^b\frac{d^k}{dx^k}\sin p_2s(x-\xi)q(\xi)\phi_{2\lambda}(\xi)d\xi,\end{aligned}$$

其中 $k=0,1$.

证明 本定理的证明可以参看定理 3.4.1 的证明过程, 这里省略. □

定理 4.4.2 令 $\lambda=s^2$, $s=\delta+it$, 则当 $|\lambda|\to\infty$ 时, 函数 $\phi_{i\lambda}(x)(x=1,2)$ 具有如下渐近式, 并且对于 $x\in I=[a,c)\cup(c,b]$ 是一致成立的:

(1) 当 $\alpha_{12}\neq0,\gamma_{12}\neq0$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{dx^k}\phi_{1\lambda}(x)&=\alpha_{12}s^2\frac{d^k}{dx^k}\cos p_1s(x-a)+O(|s|^{k+1}e^{|t|p_1(x-a)});\\\frac{d^k}{dx^k}\phi_{2\lambda}(x)&=-\alpha_{12}\gamma_{12}p_1\sin p_1s(c-a)s^3\frac{d^k}{dx^k}\cos p_2s(x-c)+O(|s|^{k+2}e^{|t|(p_1(c-a)+p_2(x-c))}).\end{aligned}$$

(2) 当 $\alpha_{12}\neq0,\gamma_{12}=0$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{dx^k}\phi_{1\lambda}(x)&=\alpha_{12}s^2\frac{d^k}{dx^k}\cos p_1s(x-a)+O(|s|^{k+1}e^{|t|p_1(x-a)});\\\frac{d^k}{dx^k}\phi_{2\lambda}(x)&=-\alpha_{12}\gamma_{22}p_1p_2^{-1}\sin p_1s(c-a)s^2\frac{d^k}{dx^k}\sin p_2s(x-c)+O(|s|^{k+1}e^{|t|(p_1(c-a)+p_2(x-c))}).\end{aligned}$$

(3) 当 $\alpha_{12}=0,\gamma_{12}\neq 0$ 时,

$$\frac{d^k}{dx^k}\phi_{1\lambda}(x)=\alpha_{11}p_1^{-1}s\frac{d^k}{dx^k}\sin p_1s(x-a)+O(|s|^k e^{|t|p_1(x-a)});$$
$$\frac{d^k}{dx^k}\phi_{2\lambda}(x)=\alpha_{11}\gamma_{12}\cos p_1s(c-a)s^2\frac{d^k}{dx^k}\cos p_2s(x-c)+O(|s|^{k+1}e^{|t|(p_1(c-a)+p_2(x-c))}).$$

(4) 当 $\alpha_{12}=0,\gamma_{12}=0$ 时,

$$\frac{d^k}{dx^k}\phi_{1\lambda}(x)=\alpha_{11}p_1^{-1}s\frac{d^k}{dx^k}\sin p_1s(x-a)+O(|s|^k e^{|t|p_1(x-a)});$$
$$\frac{d^k}{dx^k}\phi_{2\lambda}(x)=\alpha_{11}\gamma_{22}p_2^{-1}\cos p_1s(c-a)s\frac{d^k}{dx^k}\sin p_2s(x-c)+O(|s|^k e^{|t|(p_1(c-a)+p_2(x-c))}),$$

其中$k=0,1$.

证明 本定理的证明可以参看定理 3.4.2 的证明过程, 这里不再赘述. □

定理 4.4.3 令 $\lambda=s^2$, $s=\delta+it$, 则当 $|\lambda|\to\infty$ 时, 函数 $\chi_{i\lambda}(x)(i=1,2)$ 具有如下渐近式, 并且对于 $x\in I=[a,c)\cup(c,b)$ 是一致成立的:

(1) 当 $\beta_{12}\neq 0,\gamma_{12}\neq 0$ 时,

$$\frac{d^k}{dx^k}\chi_{2\lambda}(x)=\beta_{12}s^2\frac{d^k}{dx^k}\cos p_2s(b-x)+O(|s|^{k+1}e^{|t|p_2(b-x)});$$
$$\frac{d^k}{dx^k}\chi_{1\lambda}(x)=-\beta_{12}\gamma_{12}p_2\gamma^{-1}s^3\sin p_2s(b-c)\frac{d^k}{dx^k}\cos p_1s(c-x)+O(|s|^{k+2}e^{|t|(p_2(b-c)+p_1(c-x))}).$$

(2) 当 $\beta_{12}\neq 0,\gamma_{12}=0$ 时,

$$\frac{d^k}{dx^k}\chi_{2\lambda}(x)=\beta_{12}s^2\frac{d^k}{dx^k}\cos p_2s(b-x)+O(|s|^{k+1}e^{|t|p_2(b-x)});$$
$$\frac{d^k}{dx^k}\chi_{1\lambda}(x)=\beta_{12}\gamma_{11}p_2(\gamma p_1)^{-1}s^2\sin p_2s(b-c)\frac{d^k}{dx^k}\sin p_1s(c-x)+O(|s|^{k+1}e^{|t|(p_2(b-c)+p_1(c-x))}).$$

(3) 当 $\beta_{12}=0,\gamma_{12}\neq 0$ 时,

$$\frac{d^k}{dx^k}\chi_{2\lambda}(x)=\beta_{11}p_2^{-1}s\frac{d^k}{dx^k}\sin p_2s(b-x)+O(|s|^k e^{|t|p_2(b-x)});$$
$$\frac{d^k}{dx^k}\chi_{1\lambda}(x)=\beta_{11}\gamma_{12}\gamma^{-1}s^2\cos p_2s(b-c)\frac{d^k}{dx^k}\cos p_1s(c-x)+O(|s|^{k+1}e^{|t|(p_2(b-c)+p_1(c-x))}).$$

(4) 当 $\beta_{12}=0, \gamma_{12}=0$ 时,

$$\frac{d^k}{dx^k}\chi_{2\lambda}(x)=\beta_{11}p_2^{-1}s\frac{d^k}{dx^k}\sin p_2 s(b-x)+O(|s|^k e^{|t|p_2(b-x)});$$
$$\frac{d^k}{dx^k}\chi_{1\lambda}(x)=-\beta_{11}\gamma_{11}(\gamma p_1)^{-1}s\cos p_2 s(b-c)\frac{d^k}{dx^k}\sin p_1 s(c-x)+O(|s|^k e^{|t|(p_2(b-c)+p_1(c-x))}),$$

其中$k=0,1$.

证明 利用与定理 3.4.1 和 3.4.2 相同的方法, 易得关于 $\chi_{i\lambda}(x), i=1,2$ 的渐近式, 这里不赘述. □

定理 4.4.4 令 $\lambda=s^2$, $s=\delta+it$, 则当 $|\lambda|\to\infty$ 时, 判别函数 $\omega(\lambda)$具有如下渐近式:

(1) 当 $\alpha_{12}\neq 0, \beta_{12}\neq 0, \gamma_{12}\neq 0$ 时,

$$\omega(\lambda)=-\alpha_{12}\beta_{12}\gamma_{12}p_1p_2s^6\sin p_1 s(c-a)\sin p_2 s(b-c)+O(|s|^5 e^{|t|(p_1(c-a)+p_2(b-c))}).$$

(2) 当 $\alpha_{12}\neq 0, \beta_{12}\neq 0, \gamma_{12}=0$ 时,

$$\omega(\lambda)=\alpha_{12}\beta_{12}\gamma_{22}p_1s^5\sin p_1 s(c-a)\cos p_2 s(b-c)+O(|s|^4 e^{|t|(p_1(c-a)+p_2(b-c))}).$$

(3) 当 $\alpha_{12}\neq 0, \beta_{12}=0, \gamma_{12}\neq 0$ 时,

$$\omega(\lambda)=\alpha_{12}\beta_{11}\gamma_{12}p_1s^5\sin p_1 s(c-a)\cos p_2 s(b-c)+O(|s|^4 e^{|t|(p_1(c-a)+p_2(b-c))}).$$

(4) 当 $\alpha_{12}\neq 0, \beta_{12}=0, \gamma_{12}=0$ 时,

$$\omega(\lambda)=\alpha_{12}\beta_{11}\gamma_{22}p_1p_2^{-1}s^4\sin p_1 s(c-a)\sin p_2 s(b-c)+O(|s|^3 e^{|t|(p_1(c-a)+p_2(b-c))}).$$

(5) 当 $\alpha_{12}=0, \beta_{12}\neq 0, \gamma_{12}\neq 0$ 时,

$$\omega(\lambda)=\alpha_{11}\beta_{12}\gamma_{12}p_2s^5\cos p_1 s(c-a)\sin p_2 s(b-c)+O(|s|^4 e^{|t|(p_1(c-a)+p_2(b-c))}).$$

(6) 当 $\alpha_{12}=0, \beta_{12}\neq 0, \gamma_{12}=0$ 时,

$$\omega(\lambda)=-\alpha_{11}\beta_{12}\gamma_{22}s^4\cos p_1 s(c-a)\cos p_2 s(b-c)+O(|s|^3 e^{|t|(p_1(c-a)+p_2(b-c))}).$$

(7) 当 $\alpha_{12}=0,\beta_{12}=0,\gamma_{12}\neq 0$ 时,

$$\omega(\lambda)=-\alpha_{11}\beta_{11}\gamma_{12}s^4\cos p_1s(c-a)\cos p_2s(b-c)+O(|s|^3e^{|t|(p_1(c-a)+p_2(b-c))}).$$

(8) 当 $\alpha_{12}=0,\beta_{12}=0,\gamma_{12}=0$ 时,

$$\omega(\lambda)=-\alpha_{11}\beta_{11}\gamma_{22}p_2^{-1}s^3\cos p_1s(c-a)\sin p_2s(b-c)+O(|s|^2e^{|t|(p_1(c-a)+p_2(b-c))}).$$

证明 由于 Strum-Liouville 问题的 Wronsky 行列式是不依赖于 $x\in I$ 的取值, 得

$$\begin{aligned}\omega(\lambda)&=\begin{vmatrix}\phi_{2\lambda}(x) & \chi_{2\lambda}(x)\\ \phi'_{2\lambda}(x) & \chi'_{2\lambda}(x)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\phi_{2\lambda}(c+) & \chi_{2\lambda}(c+)\\ \phi'_{2\lambda}(c+) & \chi'_{2\lambda}(c+)\end{vmatrix}\\ &=\phi_{2\lambda}(c+)\chi'_{2\lambda}(c+)-\phi'_{2\lambda}(c+)\chi_{2\lambda}(c+).\end{aligned}\tag{4.4.1}$$

(1) 当 $\alpha_{12}\neq 0,\beta_{12}\neq 0,\gamma_{12}\neq 0$ 时, 将定理4.4.2 和定理4.4.3 中相应的渐近式代入式 (4.4.1), 得

$$\omega(\lambda)=-\alpha_{12}\beta_{12}\gamma_{12}p_1p_2s^6\sin p_1s(c-a)\sin p_2(b-c)+O(|s|^5e^{|t|(p_1(c-a)+p_2(b-c))}).$$

(2) 将定理 4.4.2 和 4.4.3 中相应的渐近式代入式 (4.4.1) 可得情形 $(2-8)$相应结论. □

注 4.4.1 *(定理 4.3.3 的证明):*

令 $s=it\,(t>0)$ 并将其代入 $\omega(\lambda)$ 中可得, 当 $t\to\infty$ 时, $\omega(\lambda)=\omega(-t^2)\to\infty$. 因此, 当 $\lambda=-t^2$ 充分小时, $\omega(\lambda)\neq 0$, 这就说明实特征值是下方有界的.

定理 4.4.5 令 $\lambda=s^2$, $s=\delta+it$, 则问题 (4.1.1)-(4.1.5) 的特征值至多有可数多个, 且当 $n\to\infty$ 时, 其特征值的渐近式具体如下:

(1) 当 $\alpha_{12}\neq 0,\beta_{12}\neq 0,\gamma_{12}\neq 0$ 和 $\alpha_{12}\neq 0,\beta_{12}=0,\gamma_{12}=0$ 时,

$$\sqrt{\lambda'_n}=\frac{n}{p_1(c-a)}\pi+O(\frac{1}{n})\text{ 或}\sqrt{\lambda''_n}=\frac{n}{p_2(b-c)}\pi+O(\frac{1}{n}).$$

(2) 当 $\alpha_{12}\neq 0,\beta_{12}\neq 0,\gamma_{12}=0$ 和 $\alpha_{12}\neq 0,\beta_{12}=0,\gamma_{12}\neq 0$ 时,

$$\sqrt{\lambda'_n}=\frac{n}{p_1(c-a)}\pi+O(\frac{1}{n})\text{ 或}\sqrt{\lambda''_n}=\frac{n+\frac{1}{2}}{p_2(b-c)}\pi+O(\frac{1}{n}).$$

(3) 当 $\alpha_{12}=0,\beta_{12}\neq 0,\gamma_{12}\neq 0$ 和 $\alpha_{12}=0,\beta_{12}=0,\gamma_{12}=0$ 时,

$$\sqrt{\lambda_n'}=\frac{n+\frac{1}{2}}{p_1(c-a)}\pi+O(\frac{1}{n}) \text{ 或} \sqrt{\lambda_n''}=\frac{n}{p_2(b-c)}\pi+O(\frac{1}{n}).$$

(4) 当 $\alpha_{12}=0,\beta_{12}\neq 0,\gamma_{12}=0$ 和 $\alpha_{12}=0,\beta_{12}=0,\gamma_{12}\neq 0$ 时,

$$\sqrt{\lambda_n'}=\frac{n+\frac{1}{2}}{p_1(c-a)}\pi+O(\frac{1}{n}) \text{ 或} \sqrt{\lambda_n''}=\frac{n+\frac{1}{2}}{p_2(b-c)}\pi+O(\frac{1}{n}).$$

证明 由定理 4.2.2 和 4.3.2 知, 问题 (4.1.1)-(4.1.5) 的实特征值 λ 恰好是判别函数 $\omega(\lambda)$ 的零点, 即 $\omega(\lambda)=0$.

(1) 当 $\alpha_{12}\neq 0,\beta_{12}\neq 0,\gamma_{12}\neq 0$ 时, 我们有

$$-\alpha_{12}\beta_{12}\gamma_{12}p_1p_2s^6\sin p_1s(c-a)\sin p_2s(b-c)+O(|s|^5)=0$$

$$\sin p_1s(c-a)\sin p_2s(b-c)+O(|s|^{-1})=0, \tag{4.4.2}$$

这说明当 $n\to\infty$ 时, 上述方程 (4.4.2) 的零点与方程 $\sin p_1s(c-a)\sin p_2s(b-c)=0$ 的零点是十分近似的. 因此, 当 $\sin p_1s(c-a)=0$, $\sin p_2s(b-c)\neq 0$ 时, 令 $\sqrt{\lambda'}=s_n'=\frac{n\pi}{p_1(c-a)}+\delta_n$, 则

$$\sin p_1(c-a)\delta_n+O(|n|^{-1})=0\sin p_1(c-a)\delta_n=O(|n|^{-1})\delta_n=O(|n|^{-1})$$

因此, $s_n'=\frac{n\pi}{p_1(c-a)}+O(|n|^{-1})$. 同理可得, 当 $\sin p_1s(c-a)\neq 0$, $\sin p_2s(b-c)=0$ 时, $\sqrt{\lambda''}=s_n''=\frac{n\pi}{p_2(b-c)}+O(|n|^{-1})$.

(2) 应用与(1)相同的过程我们可得本定理其他情形的结论.

□

第五章　边界条件都含特征参数且具有有限个不连续点的奇异 Sturm-Liouville 问题

本章研究边界条件都含特征参数且在区间内部具有有限个不连续点的奇异 Sturm-Liouville 问题, 结合转移条件定义新的内积，把所研究的问题转换成一个直和 Hilbert 空间上的奇异算子问题, 在此空间下得到了该问题的自伴性, 通过给定的边界条件, 将特征值问题转化为判别函数的零点问题, 得到了其特征值的相关性质及特征值的渐近公式.

5.1　基本问题

考虑对称微分方程

$$Ly := -(p(x)y')' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in I, \tag{5.1.1}$$

和依赖于特征参数的边界条件

$$L_1 y := \lambda(\alpha_{11}y(a) - \alpha_{12}y'(a)) - (\alpha_{21}y(a) - \alpha_{22}y'(a)) = 0, \tag{5.1.2}$$

$$L_2 y := \lambda(\beta_{11}[yy_1](b) - \beta_{12}[yy_2](b) + (\beta_{21}[yy_1](b) - \beta_{22}[yy_2](b) = 0, \tag{5.1.3}$$

及在内部 $c_i \in (a,b)$ 处具有转移条件

$$L_{2i+1} y := y(c_i+) - \gamma_{i1}y(c_i-) - \gamma_{i2}y'(c_i-) = 0, \tag{5.1.4}$$

$$L_{2i+2} y := y'(c_i+) - \gamma_{i3}y(c_i-) - \gamma_{i4}y'(c_i-) = 0, \tag{5.1.5}$$

所生成的微分算子的谱及其渐近分析, 其中 $I = \bigcup\limits_{j=1}^{m+1}(c_{j-1}, c_j)$, $a := c_0, b := c_{m+1}$, $p(x) = 1/p_j^2$, $x \in (c_{j-1}, c_j)$, $p_i > 0$, $j = 1, 2, \ldots, m+1$, $\lambda \in \mathbb{C}$ 是复特征参数; 系数 $\alpha_{lm}, \beta_{lm} \in R, l, m = 1, 2$, $\gamma_{ik} \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, m, k = 1, 2, 3, 4$. 函数 $q(x)$ 是 I 上的实值函数且极限 $y(c_i\pm) = \lim\limits_{x \to c_i \pm 0} y(x), i = 1, 2, \ldots, m$ 是有限的. 设 y_1, y_2 是方程 $-(p(x)y')' + q(x)y = 0$ 的两个线性无关解且满足 $[y_1y_2](b) = 1$.

本章假设 Ly 在 $x=b$ 处是极限圆型的且式 (5.1.2)-(5.1.5) 中的系数满足

$$\alpha=\begin{vmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}\end{vmatrix}>0,\ \beta=\begin{vmatrix}\beta_{11}&\beta_{12}\\ \beta_{21}&\beta_{22}\end{vmatrix}>0,\ \gamma_i=\begin{vmatrix}\gamma_{i1}&\gamma_{i2}\\ \gamma_{i3}&\gamma_{i4}\end{vmatrix}>0, i=1,2,\ldots,m.$$

注 5.1.1 由于 Ly 在点 $x=b$ 处是极限圆型的, 则由引理 2.2.9 和引理 2.2.10 知, $\int_{c_m}^{b}\bar{y_1}Lydx$, $\int_{c_m}^{b}y\overline{L^*y_1}dx$ 和 $[yy_1](c_m)$ 是存在的, 故 $[yy_1](b)$ 存在. 同理, $[yy_2](b)$ 存在. 这说明边界条件 (5.1.3) 是有意义的.

5.2 问题的自伴性

在区间 I 上平方可积的复值可测函数全体组成的空间 $H_1=L^2(I)$ 中定义如下内积:

$$\begin{aligned}<f,g>_{H_1}=&\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_m p_1^2\int_a^{c_1}f_1\overline{g_1}dx+\gamma_2\gamma_3\cdots\gamma_m p_2^2\int_{c_1}^{c_2}f_2\overline{g_2}dx+\cdots\\ &+\gamma_m p_m^2\int_{c_{m-1}}^{c_m}f_m\overline{g_m}dx+p_{m+1}^2\int_{c_m}^{b}f_{m+1}\overline{g_{m+1}}dx,\end{aligned}$$

其中

$$f_i(x)=f(x)|_{x\in(c_{i-1},c_i)}, g_i(x)=g(x)|_{x\in(c_{i-1},c_i)}, i=1,2,\ldots,m+1,$$

在线性空间 $H=H_1\oplus C^2$ 中定义内积:

$$<F,G>_H=<f,g>_{H_1}+\frac{\gamma}{\alpha}f_0\bar{g_0}+\frac{1}{\beta}f_{00}\bar{g_{00}},$$

其中

$$F=(f,f_0,f_{00}), G=(g,g_0,g_{00})\in H, f_0,g_0,f_{00},g_{00}\in C.$$

则 H 是一个Hilbert空间.

为了简便记:

$$B_ay=\alpha_{21}y(a)-\alpha_{22}y'(a),\ B'_ay=\alpha_{11}y(a)-\alpha_{12}y'(a),$$

$$B_by=\beta_{21}[yy_1](b)-\beta_{22}[yy_2](b),\ B'_by=\beta_{11}[yy_1](b)-\beta_{12}[yy_2](b).$$

在空间 H 中定义算子 T, 其定义域为

$$D(T)=\{F\in H: f_i(x),\ f_i'(x)\in AC_{loc}((c_{i-1},c_i)), i=1,2,\ldots,m+1, Lf\in H_1,$$
$$f(c_j\pm), f'(c_j\pm)\text{ 存在}, j=1,\ldots,m, L_kf=0, k=1,\ldots,2m+2,$$
$$f_0=B_a'f, f_{00}=B_b'f\}$$

令 $TF=(Tf,\ B_af,\ -B_bf)$, $Tf=Lf,\ f\in H_1$, 则问题 (5.1.1)-(5.1.5) 可以写成:

$$TY=\lambda Y,$$

其中 $Y=(y(x),\ B_a'y,\ B_b'y)\in D(T)$.

于是, 我们可以在 Hilbert 空间 H 中通过方程 $TY=\lambda Y$ 来研究问题 (5.1.1)-(5.1.5), 显然, 我们有

定理 5.2.1 问题 (5.1.1)-(5.1.5) 的特征值与算子 T 的特征值是一致的, 其特征函数是算子 T 的相应特征函数的第一个分量.

定义 5.2.1 我们把 $W(f,g;x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$ 成为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的 *Wronsky* 行列式. 特别地, 我们把 $p_{m+1}^2[fg](b)$ 记作为 $W(f,g;b)$.

定理 5.2.2 算子 T 是 *Hilbert* 空间 H 中的自伴算子.

证明 本定理的证明可以参看定理 3.2.2 的证明过程. □

推论 5.2.1 问题 (5.1.1)-(5.1.5) 的特征值是实的, 且若 λ_1,λ_2 是它的两个不同的特征值, 其相应的特征函数分别是 $u(x),v(x)$, 则在内积 $<\cdot,\cdot>_H$ 下是正交的, 即:

$$\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_m p_1^2\int_a^{c_1}u_1\overline{v_1}dx+\gamma_2\gamma_3\cdots\gamma_m p_2^2\int_{c_1}^{c_2}u_2\overline{v_2}dx+\cdots+\gamma_m p_m^2\int_{c_{m-1}}^{c_m}u_m\overline{v_m}dx$$
$$+p_{m+1}^2\int_{c_m}^{b}u_{m+1}\overline{v_{m+1}}dx+\frac{\gamma_1\cdots\gamma_m}{\alpha}B_a'u\overline{B_a'v}+\frac{1}{\beta}B_bu\overline{B_bv}.$$

5.3 特征值的性质

引理 5.3.1 [103] 若 $q(x)$ 是区间 (a,b) 上的实值函数, $f(\lambda),g(\lambda)$ 是给定的整函数, 则对于任意的 $\lambda\in C$, 方程

$$Ly:=-(p(x)y')'+q(x)y=\lambda y,\ x\in(a,b)$$

存在满足初值条件:

$$y(a)=f(\lambda),\ y'(a)=g(\lambda),$$

的唯一解 $y=y(x,\lambda)$, 且对于 $x\in(a,b)$, $y(x,\lambda)$ 是关于 λ 的整函数.

令 $\phi_{1\lambda}:=\phi_1(x,\lambda)$ 是区间 (a,c_1) 上方程 (5.1.1) 满足初值条件

$$y(a)=-\alpha_{22}+\lambda\alpha_{12},y'(a)=-\alpha_{21}+\lambda\alpha_{11}$$

的解, 则我们可以得到区间 (c_1,c_2) 上方程 (5.1.1) 满足初值条件

$$y(c_1+)=\gamma_{11}\phi_1(c_1-,\lambda)+\gamma_{12}\phi_1'(c_1-,\lambda),$$
$$y'(c_1+)=\gamma_{13}\phi_1(c_1-,\lambda)+\gamma_{14}\phi_1'(c_1-,\lambda).$$

的唯一解 $\phi_{2\lambda}$.

类似地, 我们可以得到由如下初值条件定义的 $\phi_{i+1\lambda}(i=2,3,\dots,m)$:

$$y(c_i+)=\gamma_{i1}\phi_1(c_i-,\lambda)+\gamma_{i2}\phi_1'(c_i-,\lambda),$$
$$y'(c_i+)=\gamma_{i3}\phi_1(c_i-,\lambda)+\gamma_{i4}\phi_1'(c_i-,\lambda).$$

因此, 在区间 $I=\bigcup\limits_{j=1}^{m+1}(c_{j-1},c_j)$ 上定义函数:

$$\phi(x,\lambda)=\begin{cases}\phi_1(x,\lambda), & x\in(a,c_1);\\ \phi_2(x,\lambda), & x\in(c_1,c_2);\\ \cdots\cdots & \\ \phi_{m+1}(x,\lambda), & x\in(c_m,b),\end{cases}$$

显然, $\phi(x,\lambda)$ 满足边界条件 (5.1.2) 和转移条件 (5.1.4)-(5.1.5).

同理, 我们可以定义函数:

$$\chi(x,\lambda)=\begin{cases}\chi_1(x,\lambda), & x\in(a,c_1);\\ \chi_2(x,\lambda), & x\in(c_1,c_2);\\ \cdots\cdots & \\ \chi_{m+1}(x,\lambda), & x\in(c_m,b).\end{cases}$$

使其满足边界条件 (5.1.3) 和转移条件 (5.1.4)-(5.1.5).

我们把上面定义的两个函数 $\phi(x,\lambda),\chi(x,\lambda)$ 称为方程 (5.1.1) 在区间 $I=\bigcup\limits_{j=1}^{m+1}(c_{j-1},c_j)$ 上的两个基本解.

由于 Sturm-liouville 问题的 Wronsky 行列式 $W(\phi_i,\chi_i;x), i=1,2,\ldots,m+1$ 是不依赖于 $x\in I$, 因此, 函数 $\omega_i(\lambda):=W(\phi_i(x,\lambda),\chi_i(x,\lambda))$, $i=1,2,\ldots,m+1$ 是 λ 的整函数. 从而, 我们有

定理 5.3.1 对于任意的 $\lambda\in C$, $\omega_{i+1}(\lambda)=\gamma_i\omega_i(\lambda)=\gamma_1\gamma_2\cdot\gamma_i\omega_1(\lambda)$, $i=1,\ldots,m$.

证明 由于 Wronsky 行列式 $W(\phi_i,\chi_i;x)(i=1,2,\ldots,m+1)$ 是不依赖于 $x\in I$, 因此,

$$\begin{aligned}\omega_{i+1}(\lambda)=\omega_{i+1}(\lambda)|_{x=c_i+}&=\begin{vmatrix}\phi_i(c_i+) & \chi_i(c_i+)\\ \phi_i'(c_i+) & \chi_i'(c_i+)\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}\gamma_{i1}\phi_i(c_i-)+\gamma_{i2}\phi_i'(c_i-) & \gamma_{i1}\chi_i(c_i-)+\gamma_{i2}\chi_i'(c_i-)\\ \gamma_{i3}\phi_i(c_i-)+\gamma_{i4}\phi_i'(c_i-) & \gamma_{i3}\chi_i(c_i-)+\gamma_{i4}\chi_i'(c_i-)\end{vmatrix}\\&=\gamma_i\omega_i(\lambda)\\&=\gamma_1\gamma_2\cdot\gamma_i\omega_1(\lambda).\end{aligned}$$

□

定理 5.3.2 问题 (5.1.1)-(5.1.5) 的特征值与 $\omega_1(\lambda)$ 的零点是一致的.

证明 若 $\lambda=\lambda_0$ 是 $\omega(\lambda_0)=0$ 的零点, 则 $\omega_1(\lambda_0)=0$. 由定理5.3.1 知, 函数 $\phi_{m+1}(x,\lambda),\chi_{m+1}(x)$ 是线性相关的, 即

$$\phi_{m+1}(x,\lambda)=d\chi_{m+1}(x,\lambda),\quad x\in(c_m,b),d\in\mathbf{R}$$

由 $\chi_{m+1}(x,\lambda)$ 满足边界条件 (5.1.3) 知, $\phi_{m+1\lambda_0}(x)$ 满足边界条件 (5.1.3). 故 $\phi(x,\lambda)$ 是对应于 λ_0 的特征函数, 即 λ_0 是问题 (5.1.1)-(5.1.5) 的特征值.

若 $\lambda=\lambda_0$ 是问题 (5.1.1)-(5.1.5) 的特征值, 则 $\omega_1(\lambda_0)=0$.下面利用反证法, 假设 λ_0 是问题 (5.1.1)-(5.1.5) 的特征值, 而 $\omega_1(\lambda_0)\neq 0$.

设 $\nu_0(x,\lambda_0)$ 是对应于特征值 λ_0 的任一特征函数, 则 $u_0(x,\lambda_0)$ 可以表成

$$\nu_0(x,\lambda_0)=\begin{cases}c_1\phi_1(x,\lambda_0)+d_1\chi_1(x,\lambda_0), & x\in(a,c_1);\\ c_2\phi_2(x,\lambda_0)+d_2\chi_2(x,\lambda_0), & x\in(c_1,c_2);\\ \cdots\cdots & \\ c_{m+1}\phi_{m+1}(x,\lambda_0)+d_{m+1}\chi_{m+1}(x,\lambda_0), & x\in(c_m,b),\end{cases}$$

其中 $c_1,\ldots,c_{m+1},d_1,\ldots,d_{m+1}\in\mathbb{R}$ 至少有一个不为零.

由于 $u_0(x,\lambda_0)$ 是对应于特征值 λ_0 的特征函数, 因此, $\nu_0(x,\lambda_0)$ 满足边界条件 (5.1.2)-(5.1.3) 和转移条件 (5.1.4)-(5.1.5), 即

$$L_i\nu_0(x,\lambda_0)=0,\ i=1,2,\ldots,2m+2.$$

其中方程组的系数矩阵的行列式 $W(\lambda_0)$:

$$W(\lambda_0)=\begin{vmatrix} L_1\phi_1 & L_1\chi_1 & \cdots & L_1\phi_{m+1} & L_1\chi_{m+1}\\ L_2\phi_1 & L_2\chi_1 & \cdots & L_2\phi_{m+1} & L_2\chi_{m+1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ L_{2m+1}\phi_1 & L_{2m+1}\chi_1 & \cdots & L_{2m+1}\phi_{m+1} & L_{2m+1}\chi_{m+1}\\ L_{2m+2}\phi_1 & L_{2m+2}\chi_1 & \cdots & L_{2m+2}\phi_{m+1} & L_{2m+2}\chi_{m+1}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & \omega_1(\lambda_0) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \phi_2(c_1+) & -\chi_2(c_1+) & \phi_2(c_1+) & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \phi_2'(c_1+) & -\chi_2'(c_1+) & \phi_2'(c_1+) & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\chi_{m+1}(c_m+) & \phi_{m+1}(c_m+) & \chi_{m+1}(c_m+)\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\chi_{m+1}'(c_m+) & \phi_{m+1}(c_m+) & \chi_{m+1}'(c_m+)\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \omega_{m+1}(\lambda_0) & 0\end{vmatrix}$$

$$=\omega_1(\lambda_0)\begin{vmatrix} 0 & \omega_2(\lambda_0) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \phi_3(c_1+) & -\chi_3(c_1+) & \phi_3(c_1+) & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \phi_3'(c_1+) & -\chi_3'(c_1+) & \phi_3'(c_1+) & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\chi_{m+1}(c_m+) & \phi_{m+1}(c_m+) & \chi_{m+1}(c_m+)\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\chi_{m+1}'(c_m+) & \phi_{m+1}(c_m+) & \chi_{m+1}'(c_m+)\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \omega_{m+1}(\lambda_0) & 0\end{vmatrix}$$

$$= \omega_1(\lambda_0)\cdots\omega_{m-1}(\lambda_0)\begin{vmatrix} 0 & \omega_m(\lambda_0) & 0 & 0 \\ \phi_{m+1}(c_m+) & -\chi_{m+1}(c_m+) & \phi_{m+1}(c_m+) & \chi_{m+1}(c_m+) \\ \phi'_{m+1}(c_m+) & -\chi'_{m+1}(c_m+) & \phi'_{m+1}(c_m+) & \chi'_{m+1}(c_m+) \\ 0 & 0 & \omega_{m+1}(\lambda_0) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \omega_1(\lambda_0)\omega_2(\lambda_0)\cdots\omega_m(\lambda_0)\omega_{m+1}^2(\lambda_0)$$

$$= \gamma_1^{m+1}\gamma_2^m \cdot \gamma_m^2\omega_1^{m+2}(\lambda_0).$$

由 $W(\lambda_0) \neq 0$ 知, $c_1 = \cdots = c_{m+1} = d_1 = \cdots = d_{m+1} = 0$, 这与 $c_1 = \cdots = c_{m+1} = d_1 = \cdots = d_{m+1} = 0$ 至少有一个不为零矛盾, 故 $\omega_1(\lambda_0) = 0$. 证毕. □

注 5.3.1 由定理 5.3.1 和 5.3.2 知, 问题 (5.1.1)-(5.1.5) 的特征值与 $\omega_i(\lambda)(i = 1, \ldots, m+1)$ 是一致的, 因此, 我们把函数

$$\omega(\lambda) := \omega_1(\lambda) = (\gamma_1\gamma_2 \cdot \gamma_{i-1})^{-1} \cdot \omega_i(\lambda), i = 2, \ldots, m+1.$$

称为问题 (5.1.1)-(5.1.5) 的判别函数.

注 5.3.2 由定理 5.3.2 知, 问题 (5.1.1)-(5.1.5) 的特征值与判别函数 $\omega(\lambda)$ 的零点是一致的.

定理 5.3.3 问题 (5.1.1)-(5.1.5) 的特征值是下方有界的.

证明 本定理的证明可参看定理 3.3.4 的证明过程, 这里不赘述. □

5.4 特征值的渐近公式

定理 5.4.1 令 $\lambda = s^2$, $s = \delta + it$, 则当 $|\lambda| \to \infty$ 时, 函数 $\phi_{i\lambda}(x)(x = 1, 2)$ 具有如下渐近式, 并且对于 $x \in I = [a, c) \cup (c, b]$ 是一致成立的:

(1) 当 $\alpha_{12} \neq 0$ 时,

$$\frac{d^k}{dx^k}\phi_{1\lambda}(x) = \alpha_{12}s^2\frac{d^k}{dx^k}\cos p_1 s(x-a) + O(|s|^{k+1}e^{|t|p_1(x-a)});$$

$$\frac{d^k}{dx^k}\phi_{i+1\lambda}(x) = (-1)^i\alpha_{12}\prod_{j=1}^{i}\gamma_{j2}p_j\sin p_j s(c_j - c_{j-1})s^{i+2}\frac{d^k}{dx^k}\cos p_{i+1}s(x-c_i)$$
$$+ O(|s|^{i+1+k}e^{|t|(\sum_{j=1}^{i}p_j(c_j-c_{j-1})+p_{i+1}(x-c_i))}),$$

其中 $c_0 := a$, $i = 1, 2, \ldots, m$. $k = 0, 1$.

(2) 当 $\alpha_{12}=0$ 时,

$$\frac{d^k}{dx^k}\phi_{1\lambda}(x)=\alpha_{11}p_1^{-1}s\frac{d^k}{dx^k}\sin p_1 s(x-a)+O(|s|^k e^{|t|p_1(x-a)});$$

$$\frac{d^k}{dx^k}\phi_{2\lambda}(x)=\alpha_{11}\gamma_{12}\cos p_1(c_1-a)s^2\frac{d^k}{dx^k}\cos p_2 s(x-c_1)+O(|s|^{1+k}e^{|t|(p_1(c_1-a)+p_2(x-c_1))});$$

$$\frac{d^k}{dx^k}\phi_{i+1\lambda}(x)=(-1)^{i+1}\alpha_{11}\gamma_{12}\cos p_1(c_1-a)\prod_{j=2}^{i}\gamma_{j2}p_j\sin p_j s(c_j-c_{j-1})s^{i+1}\frac{d^k}{dx^k}\cos p_{i+1}s(x-c_i)$$

$$+O(|s|^{i+k}e^{|t|(\sum\limits_{j=1}^{i}p_j(c_j-c_{j-1})+p_{i+1}(x-c_i))}),$$

其中 $i=2,3,\ldots,m,\ k=0,1.$

证明 利用与定理 3.4.1 相同的方法, 易得关于 $\phi_{i\lambda}(x), i=1,2$ 的渐近式, 这里不赘述. □

定理 5.4.2 *令 $\lambda=s^2$, $s=\delta+it$, 则当 $|\lambda|\to\infty$ 时, 函数 $\chi_{i\lambda}(x)(i=1,2)$ 具有如下渐近式, 并且对于 $x\in I=[a,c)\cup(c,b)$ 是一致成立的:*

(1) 当 $\alpha_{12}\neq 0$ 时,

$$\frac{d^k}{dx^k}\chi_{m+1\lambda}(x)=\beta_{12}s^2\frac{d^k}{dx^k}\cos p_{m+1}s(b-x)+O(|s|^{k+1}e^{|t|p_{m+1}(b-x)});$$

$$\frac{d^k}{dx^k}\chi_{m-i\lambda}(x)=\beta_{12}\prod_{j=0}^{i}\frac{\gamma_{m-j2}}{\gamma_{m-j}}p_{m+1-j}\sin p_{m+1-j}s(c_{m-j}-c_{m+1-j})s^{i+3}\frac{d^k}{dx^k}\cos p_{m-i}s(x-c_{m-i})$$

$$+O(|s|^{i+2+k}e^{|t|(\sum\limits_{j=0}^{i}p_{m+1-j}(c_{m+1-j}-c_{m-j})+p_{m-i}(c_{m-i}-x))}),$$

其中 $c_0:=a,\ i=1,2,\ldots,m.\ k=0,1.$

(2) 当 $\alpha_{12}=0$ 时,

$$\frac{d^k}{dx^k}\chi_{1\lambda}(x)=\beta_{11}p_{m+1}^{-1}s\frac{d^k}{dx^k}\sin p_{m+1}s(x-b)+O(|s|^k e^{|t|p_1(b-x)});$$

$$\frac{d^k}{dx^k}\chi_{m-i\lambda}(x)=\beta_{11}\cos p_{m+1}s(c_m-b)\prod_{j=0}^{i}\frac{\gamma_{m-j2}}{\gamma_{m-j}}p_{m+1-j}\sin p_{m+1-j}s(c_{m-j}-c_{m+1-j})s^{i+2}$$

$$\frac{d^k}{dx^k}\cos p_{m-i}s(x-c_{m-i})+O(|s|^{i+1+k}e^{|t|(\sum\limits_{j=0}^{i}p_{m+1-j}(c_{m-j}-c_{m+1-j})+p_{m-i}(c_{m-i}-x))}),$$

其中 $c_0 := a, i = 2, 3, \ldots, m-1.\ k = 0, 1.$

证明 本定理的证明与定理 3.4.3 的过程相同, 这里不赘述. □

定理 5.4.3 令 $\lambda = s^2$, $s = \delta + it$, 则当 $|\lambda| \to \infty$ 时, 判别函数 $\omega(\lambda)$ 具有如下渐近式:

(1) 当 $\alpha_{12} \neq 0, \beta_{12} \neq 0$ 时,

$$\omega(\lambda) = \alpha_{12}\beta_{12}s^{m+5}p_{m+1}\sin p_{m+1}s(b-c_m)\prod_{j=1}^{m}\frac{\gamma_{j2}}{\gamma_j}p_j\sin p_js(c_{j-1}-c_j)$$
$$+O(|s|^{m+4}e^{\sum\limits_{j=1}^{m+1}p_j|t|(c_j-c_{j-1})}),$$

其中 $c_0 := a, c_{m+1} := b$.

(2) 当 $\alpha_{12} \neq 0, \beta_{12} = 0$ 时,

$$\omega(\lambda) = \alpha_{12}\beta_{11}s^{m+4}\cos p_{m+1}(b-c_m)\prod_{j=1}^{m}\frac{\gamma_{j2}}{\gamma_j}p_j\sin p_js(c_{j-1}-c_j))$$
$$+O(|s|^{m+3}e^{\sum\limits_{j=1}^{m+1}p_j|t|(c_j-c_{j-1})},$$

其中 $c_0 := a, c_{m+1} := b$.

(3) 当 $\alpha_{12} = 0, \beta_{12} \neq 0$ 时,

$$\omega(\lambda) = \frac{\alpha_{11}\beta_{12}\gamma_{12}}{\gamma_1}s^{m+4}\cos p_1s(c_1-a)\sin p_{m+1}s(b-c_m)\prod_{j=2}^{m}\frac{\gamma_{j2}}{\gamma_j}p_j\sin p_js(c_{j-1}-c_j)$$
$$+O(|s|^{m+3}e^{\sum\limits_{j=1}^{m+1}p_j|t|(c_j-c_{j-1})}),$$

其中 $c_0 := a, c_{m+1} := b$.

(4) 当 $\alpha_{12} = 0, \beta_{12} = 0$ 时,

$$\omega(\lambda) = \frac{\alpha_{11}\beta_{11}\gamma_{12}}{\gamma_1}s^{m+3}\cos p_1s(c_1-a)\cos p_{m+1}s(b-c_m)\prod_{j=2}^{m}\frac{\gamma_{j2}}{\gamma_j}p_j\sin p_js(c_{j-1}-c_j)$$
$$+O(|s|^{m+2}e^{\sum\limits_{j=1}^{m+1}p_j|t|(c_j-c_{j-1})}),$$

其中 $c_0 := a, c_{m+1} := b$.

证明 本定理的证明可参看定理 3.4.2 的证明过程, 这里不赘述. □

定理 5.4.4 令 $\lambda = s^2$, $s = \delta + it$, 则问题 (5.1.1)-(5.1.5) 的特征值至多有可数多个, 且当 $n \to \infty$ 时, 其特征值具有如下 $m+1$ 类渐近式:

(1) 当 $\alpha_{12} \neq 0, \beta_{12} \neq 0$ 时,

$$\sqrt{\lambda_n^{(j)}} = \frac{n-1}{p_j(c_j - c_{j-1})}\pi + O(\frac{1}{n}),$$

其中 $j = 1, 2, \ldots, m+1, c_0 := a, c_{m+1} := b$.

(2) 当 $\alpha_{12} \neq 0, \beta_{12} = 0$ 时,

$$\sqrt{\lambda_n^{(j)}} = \frac{n-1}{p_j(c_j - c_{j-1})}\pi + O(\frac{1}{n}),\ \sqrt{\lambda_n^{(m+1)}} = \frac{n-\frac{1}{2}}{p_{m+1}(b - c_m)}\pi + O(\frac{1}{n}),$$

其中 $j = 1, 2, \ldots, m, c_0 := a$.

(3) 当 $\alpha_{12} = 0, \beta_{12} \neq 0$ 时,

$$\sqrt{\lambda_n^{(1)}} = \frac{n-\frac{1}{2}}{p_1(c_1 - a)}\pi + O(\frac{1}{n}),\ \sqrt{\lambda_n^{(j)}} = \frac{n-1}{p_j(c_j - c_{j-1})}\pi + O(\frac{1}{n}),$$

其中 $j = 2, \ldots, m+1, c_{m+1} := b$.

(4) 当 $\alpha_{12} = 0, \beta_{12} = 0$ 时,

$$\sqrt{\lambda_n^{(1)}} = \frac{n-\frac{1}{2}}{p_1(c_1 - a)}\pi + O(\frac{1}{n}),\ \sqrt{\lambda_n^{(m+1)}} = \frac{n-\frac{1}{2}}{p_{m+1}(b - c_m)}\pi + O(\frac{1}{n}),$$

$$\sqrt{\lambda_n^{(j)}} = \frac{n-1}{p_j(c_j - c_{j-1})}\pi + O(\frac{1}{n}),$$

其中 $j = 2, \ldots, m$.

证明 本定理的证明可参看定理 3.4.5 和 4.4.5 的证明过程, 这里不赘述. □

第六章　具有特殊系数微分算子谱的离散性

具有相同有限亏指数的对称微分算子的自伴扩张并不是唯一确定的, 但它的所有自伴扩张都具有相同的本质谱, 即自伴算子谱的离散性质完全仅依赖于它所对应的微分算式的系数. 正是由于微分算子的谱分析和系数之间有着复杂的连带关系, 致使目前已有的工作绝大部分集中于常系数、幂系数、指数函数系数或者是系数可以用幂函数、指数函数来估计的微分算子的谱分析上. 而对于某些特殊系数诸如幂指积系数、欧指积系数的情形未曾见多少成果. 我们从某些特殊系数的角度给出微分算子谱的离散性的判别准则, 丰富了微分算子谱的离散性的相关成果, 为构造微分算子谱的离散性问题统一框架提供了相关信息. 本章首先研究了具实幂指积系数、实欧指积系数的偶数阶对称微分算子的谱, 运用算子分解与二次型比较的方法, 得到了微分算式的系数在一定的条件下该类微分算子仅有离散谱; 其次研究了一类具一般系数的对称微分算式生成的自伴微分算子的谱, 得到该类微分算子无论末项和首项系数按照某种方式以无穷大为极限时其谱是离散的, 还是中间项系数按照一定方式以无穷大为极限时也可决定其谱的离散性. 这个主要结果是 E.Müller-Pfeiffer 关于常微分算子具有离散谱条件下关于末项系数积分相应描述的推广, 并且包含了二阶和高阶两项微分算式所生成的最小算子的所有自伴扩张的谱是离散的著名的 A.M.Molchanov 判定定理.

6.1　预备知识

记空间 $\dot{C}^l(x_1,x_2)$

$$\dot{C}^l(x_1,x_2)=\{y(x)\in C^l(x_1,x_2)|\parallel y(x)\parallel_{\dot{C}^l(x_1,x_2)}<\infty\},$$

$$\parallel y(x)\parallel_{\dot{C}^l(x_1,x_2)}=\sum_{k=0}^{l}\sup_{x_1<x<x_2}|y^{(k)}(x)|,$$

$$C_2^l(x_1,x_2)=\{y(x)\in C^l(x_1,x_2)|\parallel y(x)\parallel_{W_2^l(x_1,x_2))}<\infty\},$$

$$\parallel y(x)\parallel_{W_2^l(x_1,x_2))}=(\sum_{k=0}^{l}\int_{x_1}^{x_2}|y^{(k)}(x)|^2dx)^{\frac{1}{2}}.$$

Banach空间 $W_2^l(x_1,x_2)$ 是空间 $C_2^l(x_1,x_2)$ 在范数 $\|\cdot\|_{W_2^l(x_1,x_2)}$ 下的完备化. 我们可以得到如下引理.

引理 6.1.1 [50], [78] *若* $0\leq k<l$, *则空间* $W_2^l(x_1,x_2)(-\infty\leq x_1<x_2\leq+\infty)$ *连续嵌入空间*

$C^k(x_1,x_2)$ 中, 而且对于任意的 $\epsilon>0$, 存在常数 C_ϵ, 使得

$$\| y \|_{\dot{C}^k(x_1,x_2)} \le \epsilon \| y^{(l)} \|_{L^2(x_1,x_2)} + C_\epsilon \| y \|_{L^2(x_1,x_2)}$$

即

$$\sum_{j=0}^{k} \sup_{x_1<x<x_2} |y^{(k)}(x)| \le \epsilon \Big(\int_{x_1}^{x_2} |y^{(l)}(x)|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} + C_\epsilon \Big(\int_{x_1}^{x_2} |y(x)|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}$$

对于 $\forall y(x)\in W_2^l(x_1,x_2)$ 成立. 若 (x_1,x_2) 是有限区间, 则由空间 $W_2^l(x_1,x_2)$ 到空间 $C^k(x_1,x_2)$ 的嵌入是紧的.

定义 6.1.1 [50] 对于稠定的对称线性算子 A, 如果存在实数 $c\in R$, 使得

$$(Au,u)\ge c\| u \|,\ u\in D(A),$$

则称 A 是下半有界算子. 特别地, 当 $c=0$ 时, 则称 A 是正算子. 若存在 $\gamma\in R$, 使得 $c+\gamma>0$, 则算子 $A+\gamma I$ 是正定算子, 其中 $D(A+\gamma I)=D(A)$, 并有

$$((A+\gamma I)u,u)\ge (c+\gamma)\| u \|^2, c+\gamma>0, u\in D(A),$$

我们把由内积 $[u,v]_A=((A+\gamma I)u,v), u,v\in D(A)$ 所定义的范数 $\| u \|_A=[u,u]^{\frac{1}{2}}, u\in D(A)$ 称为 u 关于算子 A 的能量范数, $D(A)$ 在范数 $\|\cdot\|_A$ 下的完备化空间 H_A 是一个*Hilbert*空间, 我们把这个空间 H_A 称为算子 A 的能量空间.

引理 6.1.2 [50] 任何下半有界自伴算子 A 的谱是离散的充分必要条件是能量空间 H_A 中任何有界集在 H 中是预紧的.

定义 6.1.2 [50], [78] A 是 *Hilbert*空间 H 上的自伴算子, $\sigma(A)$ 中的全体聚点和无穷重数的特征值点称为 A 的本质谱, 记为 $\sigma_e(A)$. 本质谱在谱集中的补集称为 A 的离散谱, 记为 $\sigma_d(A)=\sigma(A)\backslash\sigma_e(A)$, 即 $\sigma_d(A)$ 是全体有限重数的孤立的特征值点, 如果 $\sigma_e(A)=\phi$, 则称 A 的谱是离散的.

引理 6.1.3 [50],[78] 具有有限相等亏指数的对称算子的所有自伴扩张的本质谱相同.

定义 6.1.3 [50], [78] 设 *Hilbert*空间 H 是两个子空间 H_1 和 H_2 的直和, A_1,A_2 分别是空间 H_1,H_2 中的算子, 即

$$D(A_i)\subseteq H_i,\ R(A_i)\subseteq H_i, i=1,2.$$

若 A_i 是自伴算子, $Ay=A_1y+A_2y, y=y_1+y_2, y_i\in D(A_i), (i=1,2)$, 则称 A 是算子 A_1 和 A_2 的直和, 记为 $A=A_1\oplus A_2$.

引理 6.1.4 [50] *(算子直和定理)* 若 A 是自伴算子 A_1 和 A_2 的直和, 则 A 是自伴算子, 且 $\sigma_e(A)=\sigma_e(A_1)\cup\sigma_e(A_2)$, $\sigma_p(A)=\sigma_p(A_1)\cup\sigma_p(A_2)$, $\sigma(A)=\sigma(A_1)\cup\sigma(A_2)$.

定义 6.1.4 [78] 如果存在数 $k=k(\lambda)>0$, 使得对于所有的 $x\in D(A)$, $\|(A-\lambda I)x\|\geq k\|x\|$, 则称 λ 为算子 A 的正则型点. A 的正则型点的全体称为 A 的正则型域, 记为 $\Pi(A)$.

引理 6.1.5 [78] 若 $K(A)=\overline{\{(Ay,y)|\forall y\in D(A),\|y\|=1\}}$, 则 $\mathbf{C}\setminus K(A)\subset\Pi(A)$, 其中 $\Pi(A)$ 表示 A 的正则型域. 当 $\sigma_r(A)=\phi$ 时, 则 $\sigma(A)\subset K(A)$.

引理 6.1.6 [78] 若 A 是 *Hilbert* 空间 H 上的自伴算子, 则 $\sigma_r(A)=\phi$.

引理 6.1.7 [50], [78] 设 $a[u,v]$, $b[u,v]$ 是两个稠定的, 闭的, 对称的, 下半有界的双线性型, 且 $a[u,u]\geq b[u,u], u\in D(a)\subseteq D(b)$, 令 A,B 分别是由 $a[u,v]$, $b[u,v]$ 生成的自伴算子. 若 $\sigma_e(B)\cap(-\infty,\lambda)=\phi$, 则 $\sigma_e(A)\cap(-\infty,\lambda)=\phi$.

引理 6.1.8 [78] 设

$$\tau(y(x))=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(a_k(x)y(x)^{(k)})^{(k)}, x\in(a,\infty), \tag{6.1.1}$$

若系数 $a_k(x)$ 都是常数, 即 $a_k(x)=a_k$, 且 $a_n>0$, 则由式 (6.1.1) 生成的算子 A_0 的任何自伴扩张的本质谱相同, 而且等于集合 $[\Lambda,\infty)$, 其中

$$\Lambda=\inf_{0<\xi<\infty}\sum_{k=0}^{n}a_k\xi^{2k}, f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\xi)e^{ix\xi}d\xi, F(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-ix\xi}dx.$$

6.2 幂指积系数微分算子谱的离散性

本节研究如下 $2n$ 阶对称微分算式所生成的微分算子谱的离散性

$$\tau(y(x))=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(a_k(x)xe^{\alpha x}y(x)^{(k)})^{(k)}, x\in(a,\infty), \tag{6.2.1}$$

其中 $a>0,\alpha>0$, $a_k(x), k=0,1,\ldots,n$ 是区间 (a,∞)上的实值函数.

若 $a_k(x)=a_k, x\in(a,\infty), k=0,1,\ldots,n$, 则微分算式 (6.2.1) 称为具有幂指积系数微分算式, 由具有幂指积系数微分算式所生成的算子称为幂指积系数微分算子.

定理 6.2.1 设算子

$$A_0y=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(a_k(x)xe^{\alpha x}y(x)^{(k)})^{(k)}, D(A_0)=C_0^{\infty}(a,\infty).$$

若 A_0 的系数满足 $a_k(x)=a_k\in\mathbf{R}$, $a_n>0$, $a_k\geq 0$, $k=0,1,\cdots,n-1,\alpha>a^{-1}>0$, 则算子 A_0 的任一自伴扩张 A 的本质谱是空集, 即算子 A_0 的任一自伴扩张 A 的谱是离散的, 记 $\sigma(A)=\sigma_d(A)$.

证明 应用分部积分, 对于任意的 $y(x)\in\mathbf{C}_0^\infty(a,\infty)$, 有

$$(A_0y,y)=(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(a_kxe^{\alpha x}y^{(k)})^{(k)},y)=\sum_{k=0}^{n}\int_a^\infty a_kxe^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx.$$

及

$$\int_a^\infty xe^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx=\frac{1}{\alpha^2}(\alpha x-1)e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2\,|_a^\infty-\frac{1}{\alpha^2}\int_a^\infty(\alpha x-1)e^{\alpha x}d|y^{(k)}|^2$$

$$\begin{aligned}
&=-\frac{1}{\alpha^2}\int_a^\infty\alpha xe^{\alpha x}(y^{(k+1)}\overline{y^{(k)}}+y^{(k)}\overline{y^{(k+1)}})dx+\frac{1}{\alpha^2}\int_a^\infty e^{\alpha x}(y^{(k+1)}\overline{y^{(k)}}+y^{(k)}\overline{y^{(k+1)}})dx\\
&\leq\frac{2}{\alpha^2}(\int_a^\infty\alpha xe^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx\int_a^\infty\alpha xe^{\alpha x}|y^{(k+1)}|^2dx)^{\frac12}+\frac{2}{\alpha^2}(\int_a^\infty e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx\int_a^\infty e^{\alpha x}|y^{(k+1)}|^2dx)^{\frac12}\\
&\leq\frac{2}{\alpha^2}(\int_a^\infty\alpha xe^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx\int_a^\infty\alpha xe^{\alpha x}|y^{(k+1)}|^2dx)^{\frac12}+\frac{2}{\alpha^2}(\int_a^\infty\alpha xe^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx\int_a^\infty\alpha xe^{\alpha x}|y^{(k+1)}|^2dx)^{\frac12}\\
&\leq\frac{4}{\alpha}(\int_a^\infty xe^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx\int_a^\infty xe^{\alpha x}|y^{(k+1)}|^2dx)^{\frac12},
\end{aligned}$$

因此,

$$\int_a^\infty xe^{\alpha x}|y^{(k+1)}|^2dx\geq(\frac{\alpha}{4})^2\int_a^\infty xe^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx.$$

更进一步, 我们有

$$\int_a^\infty xe^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx\geq(\frac{\alpha}{4})^{2k}\int_a^\infty xe^{\alpha x}|y|^2dx,\ k=0,1,\cdots,n.$$

对于充分大的正数 N, 存在 $c\in(a,\infty)$, 使得

$$a_n(\frac{\alpha}{4})^{(2k)}xe^{\alpha x}>N,x\in(c,\infty).\tag{6.2.2}$$

令算子 $A_{0,(a,c)},A_{0,(c,\infty)}$ 分别是由微分算式 (6.2.1)在区间 (a,c) 和 (c,∞) 上生成的算子, $A,A_{(a,c)},A_{(c,\infty)}$ 分别是 $A_0,A_{0,(a,c)},A_{0,(c,\infty)}$ 的 Friedrichs扩张, 则 $A=A_{(a,c)}\cup A_{(c,\infty)}$.

一方面, 我们有

$$
\begin{aligned}
(A_0y,y)_{(a,c)} &= \int_a^c a_nxe^{\alpha x}|y^{(n)}|^2dx + \sum_{k=0}^{n-1}\int_a^c a_kxe^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx \\
&\geq \int_a^c a_nxe^{\alpha x}|y^{(n)}|^2dx \\
&\geq a_nae^{a\alpha} \parallel y^{(n)} \parallel_{(a,c)}^2 .
\end{aligned}
$$

由引理 6.1.1 知, 对于充分小的 $\epsilon > 0$ 和任意的 $y(x) \in H_{A_{0,(a,c)}}$, 存在 $C_\epsilon > 0$, 使得

$$
\begin{aligned}
\parallel u \parallel_{W_2^n(a,c)}^2 &= \parallel u^{(n)} \parallel_{(a,c)}^2 + \sum_{k=0}^{n-1}\int_a^c |u^{(k)}|^2dx \\
&\leq \parallel u^{(n)} \parallel_{(a,c)}^2 + c\sum_{k=0}^{n-1}\max_{a\leq x\leq c}|u^{(k)}|^2 \\
&\leq \parallel u^{(n)} \parallel_{(a,c)}^2 + c(\epsilon \parallel u^{(n)} \parallel_{(a,c)}^2 + C_\epsilon \parallel u \parallel_{(a,c)}^2) \\
&\leq (1+\epsilon c) \parallel u^{(n)} \parallel_{(a,c)}^2 + cC_\epsilon \parallel u \parallel_{(a,c)}^2 \\
&\leq \frac{1+\epsilon c}{a_nae^{a\alpha}}(A_0u,u)_{(a,c)} + cC_\epsilon \parallel u \parallel_{(a,c)}^2 .
\end{aligned}
$$

因此, H_{A_0} 中的任意有界集在 $W_2^n(a,c)$ 中也是有界的. 由引理 6.1.2 知, H_{A_0} 中的任意有界集在 $L^2(a,c)$ 中是预紧集, 从而, $\sigma_e(A_{(a,c)}) = \phi$.

另一方面, 对于任意的 $y(x) \in D(A_{0,(c,\infty)}) = \mathbf{C}_0^\infty(c,\infty)$ 和式 (6.2.2), 有

$$
\begin{aligned}
(A_0y,y)_{(c,\infty)} &= \sum_{k=0}^{n}\int_c^\infty (a_kxe^{\alpha x}|y^{(k)}|^2)dx \\
&= \int_c^\infty (a_nxe^{\alpha x}|y^{(n)}|^2)dx + \sum_{k=0}^{n-1}\int_c^\infty (a_kxe^{\alpha x}|y^{(k)}|^2)dx \\
&\geq \int_c^\infty (a_nxe^{\alpha x}|y^{(n)}|^2)dx \\
&\geq a_n(\frac{\alpha}{4})^{2k}\int_c^\infty xe^{\alpha x}|y|^2dx \\
&\geq N(y,y)_{(c,\infty)}.
\end{aligned}
$$

由引理 6.1.5, 6.1.6 及充分大的正数 N 的任意性知, $\sigma_e(A_{0,(c,\infty)}) = \phi$. 由引理 6.1.3 和引理 6.1.4 知, $\sigma_e(A) = \sigma_e(A_{(a,c)}) \cup \sigma_e(A_{(c,\infty)}) = \phi$. □

定理 6.2.2 若算子

$$A_0y=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(a_k(x)xe^{\alpha x}y(x)^{(k)})^{(k)}, D(A_0)=C_0^{\infty}(a,\infty)$$

的系数 $a_k(x)$ 满足

$$a_n>\sum_{k=1}^{n}(\frac{4}{\alpha})^{2k}|a_{n-k}|, \tag{6.2.3}$$

其中 $a_k(x)=a_k\in\mathbf{R}$, $\alpha>0$, 则 A_0 的任一自伴扩张的谱是离散的.

证明 由条件 (6.2.3) 知, 存在常数 $\delta>0$, 使得

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}(\frac{4}{\alpha})^{2k}|a_{n-k}|+\delta.$$

对于任意的 $y(x)\in\mathbf{C}_0^{\infty}(a,\infty)$, 有

$$\begin{aligned}(A_0y,y)&=a_n(xe^{\alpha x}y^{(n)},y^{(n)})+\sum_{k=0}^{n-1}a_k(xe^{\alpha x}y^{(k)},y^{(k)})\\&=(\sum_{k=1}^{n}(\frac{4}{\alpha})^{2k}|a_{n-k}|+\delta)(xe^{\alpha x}y^{(n)},y^{(n)})+\sum_{k=0}^{n-1}a_k(xe^{\alpha x}y^{(k)},y^{(k)})\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{4}{\alpha})^{2(n-k)}|a_k|(xe^{\alpha x}y^{(n)},y^{(n)})+\sum_{k=0}^{n-1}a_k(xe^{\alpha x}y^{(k)},y^{(k)})+\delta(xe^{\alpha x}y^{(n)},y^{(n)}).\end{aligned}$$

由

$$\int_a^{\infty}xe^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx\ge(\frac{\alpha}{4})^2\int_a^{\infty}xe^{\alpha x}|y^{(k-1)}|^2dx$$

知,

$$\int_a^{\infty}xe^{\alpha x}|y^{(n)}|^2dx\ge(\frac{\alpha}{4})^{2(n-k)}\int_a^{\infty}xe^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx,$$

因此,

$$\begin{aligned}(A_0y,y)&=\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{4}{\alpha})^{2(n-k)}|a_k|(xe^{\alpha x}y^{(n)},y^{(n)})+\sum_{k=0}^{n-1}a_k(xe^{\alpha x}y^{(k)},y^{(k)})+\delta(xe^{\alpha x}y^{(n)},y^{(n)})\\&\ge\sum_{k=0}^{n-1}(|a_k|+a_k)(xe^{\alpha x}y^{(k)},y^{(k)})+\delta(xe^{\alpha x}y^{(n)},y^{(n)})\\&\ge\delta(xe^{\alpha x}y^{(n)},y^{(n)})\\&\ge\delta(\frac{\alpha}{4})^{2n}(xe^{\alpha x}y,y).\end{aligned}$$

对于任意充分大的正数 N, 存在 $c>0$, 使得

$$\delta(\frac{\alpha}{4})^{2n}xe^{\alpha x}>N,\forall x\in(c,\infty). \tag{6.2.4}$$

令算子 $A_{0,(a,c)},A_{0,(c,\infty)}$ 分别是由式 (6.2.1) 在区间 (a,c) 和 (c,∞) 上所生成的算子, $A,A_{(a,c)},A_{(c,\infty)}$ 分别是 $A_0,A_{0,(a,c)},A_{0,(c,\infty)}$ 的 Friedrichs 扩张, 则$A=A_{(a,c)}\cup A_{(c,\infty)}$.

一方面, 我们有

$$\begin{aligned}(A_0y,y)_{(a,c)}&=\int_a^c a_nxe^{\alpha x}|y^{(n)}|^2dx+\sum_{k=0}^{n-1}\int_a^c a_kxe^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx\\&\geq\int_a^c a_nxe^{\alpha x}|y^{(n)}|^2dx\geq a_nae^{a\alpha}\parallel y^{(n)}\parallel_{(a,c)}^2.\end{aligned}$$

由引理 6.1.1 知, 对于充分小的 $\epsilon>0$ 及任意的 $y(x)\in H_{A_{0,(a,c)}}$, 存在 $C_\epsilon>0$, 使得

$$\begin{aligned}\parallel u\parallel_{W_2^n(a,c)}^2&=\parallel u^{(n)}\parallel_{(a,c)}^2+\sum_{k=0}^{n-1}\int_a^c|u^{(k)}|^2dx\\&\leq\parallel u^{(n)}\parallel_{(a,c)}^2+c\sum_{k=0}^{n-1}\max_{a\leq x\leq c}|u^{(k)}|^2\\&\leq\parallel u^{(n)}\parallel_{(a,c)}^2+c(\epsilon\parallel u^{(n)}\parallel_{(a,c)}^2+C_\epsilon\parallel u\parallel_{(a,c)}^2)\\&\leq(1+\epsilon c)\parallel u^{(n)}\parallel_{(a,c)}^2+cC_\epsilon\parallel u\parallel_{(a,c)}^2\\&\leq\frac{1+\epsilon c}{a_nae^{a\alpha}}(A_0u,u)_{(a,c)}+cC_\epsilon\parallel u\parallel_{(a,c)}^2.\end{aligned}$$

因此, H_{A_0} 中的任一有界集在 $W_2^n(a,c)$ 中也是有界的. 由引理 6.1.1知, H_{A_0} 中的任一有界集是 $L^2(a,c)$ 中的预紧集, 因此, $\sigma_e(A_{(a,c)})=\phi$.

一方面, 对于任意的 $y(x)\in D(A_{0,(c,\infty)})=\mathbf{C}_0^\infty(c,\infty)$ 及式 (6.2.4), 有

$$\begin{aligned}(A_0y,y)_{(c,\infty)}&=\sum_{k=0}^{n}\int_c^\infty(a_kxe^{\alpha x}|y^{(k)}|^2)dx\\&=\int_c^\infty(a_nxe^{\alpha x}|y^{(n)}|^2)dx+\sum_{k=0}^{n-1}\int_c^\infty(a_kxe^{\alpha x}|y^{(k)}|^2)dx\\&\geq\int_c^\infty(a_nxe^{\alpha x}|y^{(n)}|^2)dx\\&\geq\delta(\frac{\alpha}{4})^{2n}(xe^{\alpha x}y,y)_{(c,\infty)}\\&\geq N(y,y)_{(c,\infty)}.\end{aligned}$$

由引理 6.1.5, 6.1.6 及充分大的正数 N 的任意性知, $\sigma_e(A_{0,(c,\infty)})=\phi$. 由引理 6.1.3 和引理 6.1.4 知, $\sigma_e(A)=\sigma_e(A_{(a,c)})\cup\sigma_e(A_{(c,\infty)})=\phi$. □

例子 6.2.1 设算子 $A_0y=(-1)^n(pxe^{\alpha x}y^{(n)}(x))^{(n)}+\beta xe^{\alpha x}y(x), D(A_0)=\mathbf{C}_0^\infty(a,\infty), x\in(a,\infty)$.

若 $\alpha>0$, $a\alpha>1$, $p>0$, $\beta\geq 0$, 则由定理 6.2.1 知, 算子 A_0 的任一自伴扩张的谱是离散的.

6.3 欧指积系数微分算子谱的离散性

本节研究如下 $2n$ 阶对称微分算式所生成的微分算子谱的离散性

$$(\tau y)(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(a_k(x)x^{2k}e^{\alpha x}y(x)^{(k)})^{(k)}, x\in(a,\infty) \tag{6.3.1}$$

其中 $\alpha>0, a>\frac{2n}{\alpha}$, $a_k(x), k=0,1,\ldots,n$ 是区间 (a,∞) 上的实值函数.

若 $a_k(x)=a_k, x\in(a,\infty), k=0,1,\ldots,n$, 则微分算式 (6.3.1) 称为具有欧指积系数微分算式, 由具有幂指积系数微分算式所生成的算子称为幂指积系数微分算子.

定理 6.3.1 若算子

$$A_0y=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(a_k(x)x^{2k}e^{\alpha x}y(x)^{(k)})^{(k)}, D(A_0)=C_0^\infty(a,\infty)$$

的系数 $a_k(x)$ 满足$a_k(x)=a_k\in\mathbf{R}$, $a_n>0$, $a_k\geq 0$, $k=0,1,\cdots,n-1$, 则 A_0 的任一自伴扩张 A 的谱是离散的, 即 $\sigma(A)=\sigma_d(A)$.

证明 应用分部积分法, 对于任意的 $y(x)\in\mathbf{C}_0^\infty(a,\infty)$ 有,

$$(A_0y,y)=(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(a_kx^{2k}e^{\alpha x}y^{(k)})^{(k)},y)=\sum_{k=0}^{n}\int_a^\infty a_kx^{2k}e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx$$

及

$$\begin{aligned}\int x^{2k}e^{\alpha x}dx=&\frac{1}{\alpha}x^{2k}e^{\alpha x}-\frac{2k}{\alpha^2}x^{2k-1}e^{\alpha x}+\frac{2k(2k-1)}{\alpha^3}x^{2k-2}e^{\alpha x}-\\&\cdots-\frac{(2k)!}{\alpha^{2k}}xe^{\alpha x}+\frac{(2k)!}{\alpha^{2k+1}}e^{\alpha x}+c\\\doteq&\Delta+c,\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
\int_a^\infty x^{2k}e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx &= -\frac{1}{\alpha}\int_a^\infty x^{2k}e^{\alpha x}y^{(k+1)}\bar{y}^{(k)}dx - \frac{1}{\alpha}\int_a^\infty x^{2k}e^{\alpha x}y^{(k)}\bar{y}^{(k+1)}dx \\
&+ \frac{2k}{\alpha^2}\int_a^\infty x^{2k-1}e^{\alpha x}y^{(k+1)}\bar{y}^{(k)}dx + \frac{2k}{\alpha^2}\int_a^\infty x^{2k-1}e^{\alpha x}y^{(k)}\bar{y}^{(k+1)}dx \\
&- \frac{2k(2k-1)}{\alpha^3}\int_a^\infty x^{2k-2}e^{\alpha x}(y^{(k+1)}\bar{y}^{(k)} + y^{(k)}\bar{y}^{(k+1)})dx + \cdots \\
&+ \frac{(2k)!}{\alpha^{2k}}\int_a^\infty xe^{\alpha x}(y^{(k+1)}\bar{y}^{(k)} + y^{(k)}\bar{y}^{(k+1)})dx \\
&- \frac{(2k)!}{\alpha^{2k+1}}\int_a^\infty e^{\alpha x}(y^{(k+1)}\bar{y}^{(k)} + y^{(k)}\bar{y}^{(k+1)})dx \\
&\le \frac{2}{\alpha}(\int_a^\infty x^{2k}e^{\alpha x}|y^{(k+1)}|^2dx\int_a^\infty x^{2k}e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \frac{4k}{\alpha^2}(\int_a^\infty x^{2k-1}e^{\alpha x}|y^{(k+1)}|^2dx\int_a^\infty x^{2k-1}e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx)^{\frac{1}{2}} + \cdots \\
&+ \frac{2(2k)!}{\alpha^{2k}}(\int_a^\infty xe^{\alpha x}|y^{(k+1)}|^2dx\int_a^\infty xe^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \frac{2(2k)!}{\alpha^{2k+1}}(\int_a^\infty e^{\alpha x}|y^{(k+1)}|^2dx\int_a^\infty e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \frac{4(k+1)}{\alpha}(\int_a^\infty x^{2k}e^{\alpha x}|y^{(k+1)}|^2dx\int_a^\infty x^{2k}e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

从而,

$$\int_a^\infty x^{2k}e^{\alpha x}|y^{(k+1)}|^2dx \ge (\frac{\alpha}{4(k+1)})^2\int_a^\infty x^{2k}e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx.$$

进一步可得,

$$\int_a^\infty x^{2k}e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx \ge (\frac{\alpha}{4(k+1)})^{2k}\int_a^\infty x^{2k}e^{\alpha x}|y|^2dx, k=0,1,\cdots,n.$$

对于任一充分大的正数 N, 存在 $c\in(a,\infty)$, 使得

$$(\frac{\alpha}{4(k+1)})^{2k}x^{2k}e^{\alpha x} > N, k=0,1,\cdots,n, x\in(c,\infty). \tag{6.3.2}$$

令算子 $A_{0,(a,c)}, A_{0,(c,\infty)}$ 分别是由式 (6.3.1) 在区间 (a,c) 和 (c,∞) 上所生成的算子, $A, A_{(a,c)}, A_{(c,\infty)}$ 分别是 $A_0, A_{0,(a,c)}, A_{0,(c,\infty)}$ 的 Friedrichs 扩张, 则 $A = A_{(a,c)}\cup A_{(c,\infty)}$.

一方面, 我们有

$$
\begin{aligned}
(A_0y,y)_{(a,c)} &= \int_a^c a_n x^{2n} e^{\alpha x}|y^{(n)}|^2 dx + \sum_{k=0}^{n-1}\int_a^c a_k x^{2k} e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2 dx \\
&\geq \int_a^c a_n x^{2n} e^{\alpha x}|y^{(n)}|^2 dx \\
&\geq a_n a^{2n} e^{a\alpha} \parallel y^{(n)} \parallel_{(a,c)}^2 .
\end{aligned}
$$

应用引理 6.1.1 知, 对于充分小的 $\epsilon > 0$ 及任意的 $y(x) \in H_{A_{0,(a,c)}}$, 存在 $C_\epsilon > 0$, 使得

$$
\begin{aligned}
\parallel u \parallel_{W_2^n(a,c)}^2 &= \parallel u^{(n)} \parallel_{(a,c)}^2 + \sum_{k=0}^{n-1}\int_a^c |u^{(k)}|^2 dx \\
&\leq \parallel u^{(n)} \parallel_{(a,c)}^2 + c\sum_{k=0}^{n-1}\max_{a\leq x\leq c}|u^{(k)}|^2 \\
&\leq \parallel u^{(n)} \parallel_{(a,c)}^2 + c(\epsilon \parallel u^{(n)} \parallel_{(a,c)}^2 + C_\epsilon \parallel u \parallel_{(a,c)}^2) \\
&\leq (1+\epsilon c) \parallel u^{(n)} \parallel_{(a,c)}^2 + cC_\epsilon \parallel u \parallel_{(a,c)}^2 \\
&\leq \frac{1+\epsilon c}{a_n a^{2n} e^{a\alpha}}(A_0u,u)_{(a,c)} + cC_\epsilon \parallel u \parallel_{(a,c)}^2 .
\end{aligned}
$$

因此, H_{A_0} 中的任意的有界集在 $W_2^n(a,c)$ 中也是有界的. 由引理 6.1.1 知, H_{A_0} 中的任意的有界集是 $L^2(a,c)$ 中的预紧集, 因此, $\sigma_e(A_{(a,c)}) = \phi$.

一方面, 对于任意的 $y(x) \in D(A_{0,(c,\infty)}) = \mathbf{C}_0^\infty(c,\infty)$ 及式 (6.3.2) 有,

$$
\begin{aligned}
(A_0y,y)_{(c,\infty)} &= \sum_{k=0}^{n}\int_c^\infty (a_k x^{2k} e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2) dx \\
&= \int_c^\infty (a_n x^{2n} e^{\alpha x}|y^{(n)}|^2) dx + \sum_{k=0}^{n-1}\int_c^\infty (a_k x^{2k} e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2) dx \\
&\geq \int_c^\infty (a_n x^{2n} e^{\alpha x}|y^{(n)}|^2) dx \\
&\geq a_n (\frac{\alpha}{4(n+1)})^{2n}\int_c^\infty x^{2n} e^{\alpha x}|y|^2 dx \\
&\geq N(y,y)_{(c,\infty)}.
\end{aligned}
$$

由引理 6.1.5, 6.1.6 及充分大的正数 N 的任意性知, $\sigma_e(A_{0,(c,\infty)}) = \phi$. 由引理 6.1.3 和引理 6.1.4 知, $\sigma_e(A) = \sigma_e(A_{(a,c)}) \cup \sigma_e(A_{(c,\infty)}) = \phi$. □

定理 6.3.2 若算子

$$A_0y=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(a_k(x)x^{2k}e^{\alpha x}y(x)^{(k)})^{(k)}, D(A_0)=C_0^\infty(a,\infty)$$

的系数 $a_k(x)$ 满足

$$a_n>\sum_{k=1}^{n}(\frac{4(n+1)}{\alpha})^{2k}|a_{n-k}|, \tag{6.3.3}$$

其中 $a_k(x)=a_k\in\mathbf{R}$, $\alpha>0$, 则 A_0 的任一自伴扩张 A 的谱是离散的, 即 $\sigma(A)=\sigma_d(A)$.

证明 由式 (6.3.3), 存在常数 $\delta>0$, 使得

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}(\frac{4(n+1)}{\alpha})^{2k}|a_{n-k}|+\delta.$$

对于任意的 $y(x)\in\mathbf{C}_0^\infty(a,\infty)$, 有

$$\begin{aligned}(A_0y,y)&=a_n(x^{2n}e^{\alpha x}y^{(n)},y^{(n)})+\sum_{k=0}^{n-1}a_k(x^{2k}e^{\alpha x}y^{(k)},y^{(k)})\\&=(\sum_{k=1}^{n}(\frac{4(n+1)}{\alpha})^{2k}|a_{n-k}|+\delta)(x^{2n}e^{\alpha x}y^{(n)},y^{(n)})+\sum_{k=0}^{n-1}a_k(x^{2k}e^{\alpha x}y^{(k)},y^{(k)})\\&=\sum_{k=0}^{n-1}((\frac{4(n+1)}{\alpha})^{2(n-k)}|a_k|+\delta)(x^{2n}e^{\alpha x}y^{(n)},y^{(n)})+\sum_{k=0}^{n-1}a_k(x^{2k}e^{\alpha x}y^{(k)},y^{(k)}).\end{aligned}$$

由

$$\int_a^\infty x^{2k}e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx\ge(\frac{\alpha}{4(k+1)})^2\int_a^\infty x^{2k}e^{\alpha x}|y^{(k-1)}|^2dx,$$

得

$$\int_a^\infty x^{2n}e^{\alpha x}|y^{(n)}|^2dx\ge(\frac{\alpha}{4(n+1)})^{2(n-k)}\int_a^\infty x^{2k}e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx,$$

因此,

$$\begin{aligned}(A_0y,y)&=(\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{4(n+1)}{\alpha})^{2(n-k)}|a_k|+\delta)(x^{2n}e^{\alpha x}y^{(n)},y^{(n)})+\sum_{k=0}^{n-1}a_k(x^{2k}e^{\alpha x}y^{(k)},y^{(k)})\\&\ge\sum_{k=0}^{n-1}(|a_k|+a_k)(x^{2k}e^{\alpha x}y^{(k)},y^{(k)})+\delta(x^{2n}e^{\alpha x}y^{(n)},y^{(n)})\\&\ge\delta(x^{2n}e^{\alpha x}y^{(n)},y^{(n)})\\&\ge\delta(\frac{\alpha}{4(n+1)})^{2n}(x^{2n}e^{\alpha x}y,y).\end{aligned}$$

对于任意充分大的正数 N, 存在常数 $c>0$, 使得

$$\delta(\frac{\alpha}{4(n+1)})^{2n}x^{2n}e^{\alpha x}>N,\forall x\in(c,\infty).$$

令算子 $A_{0,(a,c)},A_{0,(c,\infty)}$ 分别是由式 (6.3.1) 在区间 (a,c) 和 (c,∞) 上所生成的算子, $A,A_{(a,c)},A_{(c,\infty)}$ 分别表示 $A_0,A_{0,(a,c)},A_{0,(c,\infty)}$ 的 Friedrichs 扩张, 则 $A=A_{(a,c)}\cup A_{(c,\infty)}$.

一方面, 对于任意的 $y(x)\in D(A_{0,(a,c)})=\mathbf{C}_0^\infty(a,c)$, 有

$$\begin{aligned}(A_0y,y)_{(a,c)}&=\int_a^c a_nx^{2n}e^{\alpha x}|y^{(n)}|^2dx+\sum_{k=0}^{n-1}\int_a^c a_kx^{2k}e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx\\&\geq\delta a^{2n}e^{a\alpha}\parallel y^{(n)}\parallel^2_{(a,c)}.\end{aligned}$$

由引理 6.1.1 知, 对于充分小的 $\epsilon>0$ 及任意的 $y(x)\in H_{A_{0,(a,c)}}$, 存在 $C_\epsilon>0$, 使得

$$\begin{aligned}\parallel u\parallel^2_{W_2^n(a,c)}&=\parallel u^{(n)}\parallel^2_{(a,c)}+\sum_{k=0}^{n-1}\int_a^c|u^{(k)}|^2dx\\&\leq\parallel u^{(n)}\parallel^2_{(a,c)}+c\sum_{k=0}^{n-1}\max_{a\leq x\leq c}|u^{(k)}|^2\\&\leq\parallel u^{(n)}\parallel^2_{(a,c)}+c(\epsilon\parallel u^{(n)}\parallel^2_{(a,c)}+C_\epsilon\parallel u\parallel^2_{(a,c)})\\&\leq(1+\epsilon c)\parallel u^{(n)}\parallel^2_{(a,c)}+cC_\epsilon\parallel u\parallel^2_{(a,c)}\\&\leq\frac{1+\epsilon c}{\delta a^{2n}e^{a\alpha}}(A_0u,u)_{(a,c)}+cC_\epsilon\parallel u\parallel^2_{(a,c)}.\end{aligned}$$

因此, H_{A_0} 中的任意的有界集在 $W_2^n(a,c)$ 中也是有界的. 由引理 6.1.2 知, H_{A_0} 中的任意的有界集是 $L^2(a,c)$ 中的预紧集, 因此, $\sigma_e(A_{(a,c)})=\phi$.

另一方面, 对于任意的 $y(x)\in D(A_{0,(c,\infty)})=\mathbf{C}_0^\infty(c,\infty)$ 及式 (6.3.3), 有

$$\begin{aligned}(A_0y,y)_{(c,\infty)}&=\sum_{k=0}^{n}\int_c^\infty(a_kx^{2k}e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2)dx\\&=\int_c^\infty(a_nx^{2n}e^{\alpha x}|y^{(n)}|^2)dx+\sum_{k=0}^{n-1}\int_c^\infty(a_kx^{2k}e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2)dx\\&\geq\delta(\frac{\alpha}{4(n+1)})^{2n}(x^{2n}e^{\alpha x}y,y)_{(c,\infty)}\\&\geq N(y,y)_{(c,\infty)}.\end{aligned}$$

由引理 6.1.5, 6.1.6 及充分大的正数 N 的任意性知, $\sigma_e(A_{0,(c,\infty)})=\phi$. 由引理 6.1.3 和引理 6.1.4 知, $\sigma_e(A)=\sigma_e(A_{(a,c)})\cup\sigma_e(A_{(c,\infty)})=\phi$. □

例子 6.3.1 设$A_0y=(144+12\beta)(x^4e^{\alpha x}y''(x))''+(x^2e^{\alpha x}y(x)')'+\beta xe^{\alpha x}y(x), D(A_0)=\mathbf{C}_0^\infty(a,\infty)$.

若 $\alpha>1,\ a>0,\ \beta\geq 0$, 则

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2}(\frac{12}{\alpha})^{2k}|a_{2-k}| &= (\frac{12}{\alpha})^2|a_1|+(\frac{12}{\alpha})^4|a_0| \\
&= (\frac{12}{\alpha})^2|-1|+(\frac{12}{\alpha})^4\beta \\
&= \frac{144}{\alpha^2}+(\frac{12}{\alpha})^4\beta \\
&< 144+12\beta=a_2.
\end{aligned}
$$

由定理 6.3.2 知, A_0 的任意的自伴扩张的谱是离散的.

6.4 一般系数微分算子谱的离散性

本节研究系数满足更具一般性的条件的 $2n$ 阶对称微分算式所生成的算子, 得到了其谱是离散的关于函数系数一般项 $a_p(x)$ 积分的刻画一些充分必要条件, 其主要结果是 E.Müller-Pfeiffer 关于常微分算子具有离散谱条件关于算子系数函数 $a_0(x)$ 积分相应描述的推广, 并且包含了二阶和高阶两项微分算式所生成的最小算子的所有自伴扩张的谱是离散的著名的 A.M.Molchanov 判定定理.

研究如下 $2n$ 阶对称微分算式所生成的微分算子谱的离散性,

$$
\tau(y(x))=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(a_k(x)y(x)^{(k)})^{(k)}, x\in(0,\infty) \tag{6.4.1}
$$

其中 $a_k(x)$ 是定义在区间 $(0,\infty)$ 上的实值函数.

定理 6.4.1 若对称微分算式 (6.4.1) 中的系数 $a_k(x)$ 满足以下条件:

(1) $a_k(x)\in W_2^k(0,X), 0\leq k\leq n, \forall X>0$;

(2) 存在 r和 p, $0\leq p<r\leq n$, 使得 $\inf\limits_{0<x<\infty}a_r(x)=\alpha>0, a_k(x)\geq 0, r<k<n$;

(3) 存在 $Y>0$, 使得当 $x>Y$ 时, $a_k(x)\geq 0, 0\leq k<r$;

(4) $\sup\limits_{0<x<\infty}\int_x^{x+1}a_k(t)dt<\infty, 0\leq k\leq n, k\neq p$,

则由式 (6.4.1) 所生成的最小算子 A_0 的任何自伴扩张的谱是离散的充要条件是对于确定的 $\omega>0$, 有

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\int_x^{x+\omega}a_p(t)dt=\infty$.

证明 **充分性** 利用引理 6.1.1 及条件 (1 − 3), 对于充分小的 $\epsilon_1 > 0$, 存在 $X_1 > 0$ 及 $u(x) \in C_0^\infty(0,\infty)$, 有

$$\begin{aligned}
(A_0u,u) &= \sum_{k=0}^{r}\int_0^\infty a_k(x)|u^{(k)}|^2dx + \sum_{k=r+1}^{n}\int_0^\infty a_k(x)|u^{(k)}|^2dx \\
&\geq \sum_{k=0}^{r}\int_0^\infty a_k(x)|u^{(k)}|^2dx = (A_0^ru,u) \\
&= \sum_{k=0}^{r}\int_0^{X_1} a_k(x)|u^{(k)}|^2dx + \sum_{k=0}^{r}\int_{X_1}^\infty a_k(x)|u^{(k)}|^2dx \\
&\geq \int_0^{X_1} a_r(x)|u^{(r)}|^2dx + \sum_{k=0}^{r-1}\int_0^{X_1} a_k(x)|u^{(k)}|^2dx \\
&\geq \alpha \parallel u^{(r)} \parallel^2 - \sum_{k=0}^{r-1}\int_0^{X_1} |a_k(x)||u^{(k)}|^2dx \\
&\geq \alpha \parallel u^{(r)} \parallel^2 - \sum_{k=0}^{r-1}\max_{0<x<X_1}|u^{(k)}|^2\int_0^{X_1}|a_k(x)|dx \\
&\geq \alpha \parallel u^{(r)} \parallel^2 - C(\epsilon_1 \parallel u^{(r)} \parallel^2 + C_{\epsilon_1}\parallel u \parallel^2) \\
&\geq \frac{\alpha}{2}\parallel u^{(r)} \parallel^2 - CC_{\epsilon_1}\parallel u \parallel^2,
\end{aligned} \tag{6.4.2}$$

这说明 A 是下半有界算子.

由条件 (5)知, 对于充分大的 $b_p > 0$, 存在 $X_2 > 0$, 使得当 $x > X_2$ 时, 有

$$\int_x^{x+\omega} a_p(t)dt \geq b_p\omega. \tag{6.4.3}$$

取 $X = \max\{X_1, X_2\}$, 定义算子:

$$A_{0,(0,X)}u = \tau u,\ D(A_{0,(0,X)}) = C_0^\infty(0,X)$$
$$A_{0,(X,\infty)}u = \tau u,\ D(A_{0,(X,\infty)}) = C_0^\infty(X,\infty)$$

以 $A^r_{(0,X)}$, $A^r_{(X,\infty)}$, A^r 和 A 分别表示 $A^r_{0,(0,X)}$, $A^r_{0,(X,\infty)}$, A_0^r 和 A_0 的 Friedrichs 扩张, 由引理 6.1.4 知, $\sigma_e(A^r) = \sigma_e(A^r_{(0,X)}) \cup \sigma_e(A^r_{(X,\infty)})$. 由引理 6.1.7 及式 (6.4.2) 知, 若 A^r 的谱是离散的, 即 $\sigma_e(A^r) = \phi$, 则 $\sigma_e(A) \cap (-\infty,\infty) = \phi$, 即 A 的谱是离散的. 因此, 要证明 $\sigma_e(A^r) = \phi$ 只需证明 $\sigma_e(A^r_{(0,X)}) = \phi$ 及 $\sigma_e(A^r_{(X,\infty)}) = \phi$ 即可.

下面证明 $\sigma_e(A^r_{(0,X)})=\phi$. 由式 (6.4.2) 及充分小的 $\epsilon_2>0$ 知,

$$\begin{aligned}
\| u \|^2_{W_2^r(0,X)} &= \sum_{k=0}^{r}\int_0^X |u^{(k)}|^2dx \\
&=\| u^{(r)} \|^2 + \sum_{k=0}^{r-1}\int_0^X |u^{(k)}|^2dx \\
&\le \| u^{(r)} \|^2 + X\sum_{k=0}^{r-1}\max_{0\le x\le X}|u^{(k)}|^2 \\
&\le \| u^{(r)} \|^2 + X(\epsilon_2 \| u^{(r)} \|^2 + C_{\epsilon_2}\| u \|^2) \\
&\le (1+\epsilon_2 X)\| u^{(r)} \|^2 + XC_{\epsilon_2}\| u \|^2 \\
&\le \frac{2+2\epsilon_2 X}{\alpha}((A_0u,u)+CC_{\epsilon_1}\| u \|^2)+XC_{\epsilon_2}\| u \|^2 \\
&\le \frac{2+2\epsilon_2 X}{\alpha}(A_0u,u)+(\frac{2CC_{\epsilon_1}+2\epsilon_2 CC_{\epsilon_1}X}{\alpha}+XC_{\epsilon_2})\| u \|^2 .
\end{aligned}$$

因此, 能量空间 H_{A_0} 中的任何有界集都是空间 $W_2^r(0,X)$ 中的有界集, 从而能量空间 H_{A_0} 中的任何有界集都是空间 $L^2(0,X)$ 中的预紧集. 由引理 6.1.2 知, $\sigma_e(A^r_{(0,X)})=\phi$.

接下来证明 $\sigma_e(A^r_{(X,\infty)})=\phi$. 令

$$B_0u=\sum_{k=0}^{r}(-1)^k b_k u^{(2k)},\ D(B_0)=C_0^\infty(X,\infty),$$

其中 $0<\epsilon<\frac{\alpha}{2}$ 是充分小的正数, $b_r=\epsilon,\ b_k=-\epsilon,\ 0\le k<r, k\neq p$, 则由引理 6.1.1 知, $(B_0u,u)>\Lambda_\epsilon \| u \|^2_{(X,\infty)}$, 其中

$$\Lambda_\epsilon=\inf_{0<\xi<\infty}\sum_{k=0}^{r}b_k\xi^{2k}=\inf_{0<\xi<\infty}(\epsilon\xi^{2r}-\epsilon\xi^{2(r-1)}-\cdots+b_p\xi^{2p}-\cdots-\epsilon\xi^2-\epsilon).$$

由于 $0<\epsilon<\frac{\alpha}{2}$ 是任意小的正数, $0<\xi<\infty$ 是有界量及 b_p 是充分大的正数, 由上式易得 Λ_ϵ 是充分大的正数.

定义算子:

$$S_0u=\sum_{k=0}^{r}(-1)^k[(a_k(x)-b_k)u^{(k)}]^{(k)}dx, D(S_0)=C_0^\infty(X,\infty),$$

则 $A_0^r u=B_0u+S_0u, u(x)\in C_0^\infty(X,\infty)$.

对于 $\forall u(x)\in C_0^\infty(X,\infty)$ 及式 (6.4.1), 有

$$\begin{aligned}(S_0u,u)&=\sum_{k=0}^{r}\int_X^\infty(a_k(x)-b_k)|u^{(k)}|^2dx\\&=\int_X^\infty(a_r(x)-\epsilon)|u^{(r)}|^2dx+\int_X^\infty(a_{r-1}(x)+\epsilon)|u^{(r-1)}|^2dx+\cdots\\&+\int_X^\infty(a_p(x)-b_p)|u^{(p)}|^2dx+\cdots+\int_X^\infty(a_0(x)+\epsilon)|u|^2dx\\&\geq(\alpha-\epsilon)\parallel u^{(r)}\parallel^2+\epsilon\parallel u^{(r-1)}\parallel^2+\cdots+\int_X^\infty(a_p(x)-b_p)|u^{(p)}|^2dx+\cdots+\epsilon\parallel u\parallel^2\\&\geq\frac{\alpha}{2}\parallel u^{(r)}\parallel^2+\epsilon\parallel u^{(r-1)}\parallel^2+\cdots+\int_X^\infty(a_p(x)-b_p)|u^{(p)}|^2dx+\cdots+\epsilon\parallel u\parallel^2\\&\geq 0.\end{aligned}$$

因此, $(A_0^ru,u)=(B_0u,u)+(S_0u,u)\geq(B_0u,u)\geq\Lambda_\epsilon$. 由引理 6.1.5 及 6.1.6 知, $\sigma_e(A^r_{(X,\infty)})\cap(-\infty,\Lambda_\epsilon)=\phi$, 故 $\sigma_e(A^r_{(X,\infty)})=\phi$.

必要性 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\int_x^{x+\omega}a_p(t)dt=\infty$ 不成立, 则存在 $\omega^*>0$ 及互不相交的区间列 $\omega_v=[x_v,x_v+\omega^*],v=1,2,3,\ldots$, 使得

$$\sup_{v=1,2,\ldots}\int_{x_v}^{x_v+\omega^*}a_p(x)dx<\infty,x_1<x_2<\cdots.$$

设 $u_1(x)\in C_0^\infty(0,\infty),\parallel u_1(x)\parallel=1$, $u_1(x)$ 的紧支柱包含在 ω_1 内, 令

$$u_v(x)=u_1(x-x_v+x_1),v=1,2,\ldots,$$

则我们有 $(u_v,u_{v'})=\delta_{vv'}$, 即 $\{u_v(x)\}_{v=1,2,\ldots}$ 是正交列, 因此, $\{u_v(x)\}_{v=1,2,\ldots}$ 在Hilbert空间 $H=L^2(0,\infty)$ 内是非预紧的.

由条件 (4) 知,

$$\begin{aligned}(A_0u_v,u_v)&=\sum_{k=0}^{n}\int_0^\infty a_k(x)|u_v^{(k)}|^2dx\\&=\sum_{k=0}^{n}\int_{x_v}^{x_v+\omega^*}a_k(x)|u_v^{(k)}|^2dx\\&\leq\sum_{k=0}^{n}\max_{x_v<x<x_v+\omega^*}|u_v^{(k)}|^2\int_{x_v}^{x_v+\omega^*}|a_k(x)|dx\\&=\sum_{k=0}^{n}\max_{x_1<x<x_1+\omega^*}|u_1^{(k)}|^2\int_{x_v}^{x_v+\omega^*}|a_k(x)|dx\leq C\end{aligned}$$

即 $\{u_v(x)\}_{v=1,2,\ldots}$ 在能量空间 H_{A_0} 中是有界的. 再由 A_0 的任何自伴扩张的谱是离散的及引理 6.1.2 知, $\{u_v(x)\}_{v=1,2,\ldots}$ 在 *Hilbert* 空间 $H=L^2(0,\infty)$ 内是预紧的, 这与 $\{u_v(x)\}_{v=1,2,\ldots}$ 是非预紧的矛盾. □

定理6.4.2 若对称微分算式 (6.4.1) 中的系数 $a_k(x)$ 满足以下条件:

(1) $a_k(x)\in W_2^k(0,X), 0\le k\le n, \forall X>0, \inf\limits_{0<x<\infty} a_n(x)=\alpha>0, 0<x<\infty;$

(2) $\sup\limits_{0<x<\infty}\int_x^{x+1}|a_k(t)|dt<\infty, 0\le k\le n, k\ne p, 0\le p<n;$

(3) $\inf\limits_{0<x<\infty}\int_x^{x+1}a_p^-(t)dt>-\infty,$

则由式 (6.4.1) 所生成的最小算子 A_0 的任何自伴扩张的谱是离散的充要条件是对于确定的ω, 有

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\int_x^{x+\omega}a_p(t)dt=\infty.$

证明 定理 6.4.2 必要性的证明与定理 6.4.1 的必要性类似，这里不赘述. 因此，我们只需要证明充分性即可.

对于 $\forall u(x)\in C_0^\infty(0,\infty)$,

$$\begin{aligned}(A_0u,u)&=\int_0^\infty a_n(x)|u^{(n)}|^2dx+\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\infty(a_k^+(x)+a_k^-(x))|u^{(k)}|^2dx\\&=\int_0^\infty a_n(x)|u^{(n)}|^2dx+\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\infty a_k^+(x)|u^{(k)}|^2dx+\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\infty a_k^-(x)|u^{(k)}|^2dx\end{aligned}$$

由条件(2), 对于充分大的 $X_1>0$, 存在充分大的 $M>0$, 使得当 $x>X_1$ 时,

$$\int_x^{x+1}|a_k^-(x)|dx\le M, k\ne p. \tag{6.4.4}$$

由条件 (3), 对于充分大的 $X_2>0$, 存在充分大的 $N>0$, 使得当 $x>X_2$ 时,

$$-\int_x^{x+1}|a_p^-(x)|dx\le -N. \tag{6.4.5}$$

因此, 取 $X=\max\{X_1,X_2\}$, 由式 (6.4.4), (6.4.3) 及充分小的 ϵ_1, 有

$$
\begin{aligned}
(A_0u,u) &= \int_X^\infty a_n(x)|u^{(n)}|^2dx + \sum_{k=0}^{n-1}\int_X^\infty a_k^+(x)|u^{(k)}|^2dx + \sum_{k=0}^{n-1}\int_X^\infty a_k^-(x)|u^{(k)}|^2dx \\
&\ge \int_X^\infty a_n(x)|u^{(n)}|^2dx + \sum_{k=0}^{n-1}\int_X^\infty a_k^+(x)|u^{(k)}|^2dx - \sum_{k=0}^{n-1}\int_X^\infty |a_k^-(x)||u^{(k)}|^2dx \\
&\ge \alpha \parallel u^{(n)} \parallel^2 + \sum_{k=0}^{n-1}\int_X^\infty a_k^+(x)|u^{(k)}|^2dx - \sum_{k=0}^{n-1}\int_X^\infty |a_k^-(x)||u^{(k)}|^2dx \\
&= \alpha \parallel u^{(n)} \parallel^2 + \sum_{k=0}^{n-1}\int_X^\infty a_k^+(x)|u^{(k)}|^2dx - \sum_{v=X}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\int_v^{v+1} |a_k^-(x)||u^{(k)}|^2dx \\
&\ge \alpha \parallel u^{(n)} \parallel^2 + \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\infty a_k^+(x)|u^{(k)}|^2dx - \sum_{v=X}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\max_{v<x<v+1}|u^{(k)}|^2\int_v^{v+1} |a_k^-(x)|dx \\
&\ge \alpha \parallel u^{(n)} \parallel^2 + \sum_{k=0}^{n-1}\int_X^\infty a_k^+(x)|u^{(k)}|^2dx - C\sum_{v=X}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\max_{v<x<v+1}|u^{(k)}|^2 \\
&\ge \alpha \parallel u^{(n)} \parallel^2 + \sum_{k=0}^{n-1}\int_X^\infty a_k^+(x)|u^{(k)}|^2dx - C\sum_{v=X}^{\infty}(\epsilon_1 \parallel u^{(n)} \parallel^2 + C_{\epsilon_1} \parallel u \parallel^2) \\
&\ge (\alpha - C\epsilon_1) \parallel u^{(n)} \parallel^2 + \sum_{k=0}^{n-1}\int_X^\infty a_k^+(x)|u^{(k)}|^2dx - CC_{\epsilon_1} \parallel u \parallel^2 \\
&\ge \frac{\alpha}{2} \parallel u^{(n)} \parallel^2 + \int_X^\infty a_p^+(x)|u^{(k)}|^2dx - C_1 \parallel u \parallel^2
\end{aligned}
$$

其中 $C=\max\{N,M\}, C_1=CC_{\epsilon_1}, 0<\epsilon_1<\frac{\alpha}{2C}$.

由引理 6.1.1, 条件 (4) 和充分小的 $0<\epsilon<\frac{\alpha}{2}$ 及充分大的 $b_p>0$, 存在 $X_\epsilon \ge X$, 使得对于 $\forall u(x)\in C_0^\infty(X_\epsilon,\infty)$, 有

$$
\begin{aligned}
(A_0u,u) &\ge \frac{\alpha}{2} \parallel u^{(n)} \parallel^2 + \int_{X_\epsilon}^\infty a_p^+(x)|u^{(k)}|^2dx - C_1 \parallel u \parallel^2 \\
&\ge \frac{\alpha}{2} \parallel u^{(n)} \parallel^2 + \int_{X_\epsilon}^\infty a_p^+(x)|u^{(k)}|^2dx - C_1 \parallel u \parallel^2 - \epsilon\sum_{k=0}^{n}\int_{X_\epsilon}^\infty |u^{(k)}|^2dx \\
&= \sum_{k=0}^{n}\int_{X_\epsilon}^\infty a_{k,0}|u^{(k)}|^2dx - C_1 \parallel u \parallel^2 \\
&\ge \Lambda_\epsilon(u,u) - C_1 \parallel u \parallel^2,
\end{aligned}
\tag{6.4.6}
$$

其中 $a_{n,0}=\frac{\alpha}{2}-\epsilon,\ a_{p,0}=b_p-\epsilon,\ a_{k,0}=-\epsilon,\ k\ne n,p, \Lambda_\epsilon=\inf\limits_{0<\xi<\infty}[(\frac{\alpha}{2}-\epsilon)\xi^{2n}-\epsilon\xi^{2(n-1)}-\cdots+(b_p-\epsilon)\xi^{2p}-\cdots-\epsilon\xi^2-\epsilon]$.

以 $A_{(0,X_\epsilon)}, A_{(X_\epsilon,\infty)}$ 和 A 分别表示 $A_{0,(0,X_\epsilon)}, A_{0,(X_\epsilon,\infty)}$ 和 A_0 的 Friedrichs 扩张, 由引理

6.1.4 知,

$$\sigma_e(A) = \sigma_e(A_{(0,X_\epsilon)}) \cup \sigma_e(A_{(X_\epsilon,\infty)}).$$

由引理 6.1.5, 6.1.6 和式 (6.4.1) 知, $\sigma_e(A_{(X_\epsilon,\infty)}) \cap (-\infty, \Lambda_\epsilon - C_1) = \phi$. 由于正数 b_p 的任意性, 故

$$\sigma_e(A_{(X_\epsilon,\infty)}) = \phi. \tag{6.4.7}$$

下面证明 $\sigma_e(A_{(0,X_\epsilon)}) = \phi$.

对于 $\forall u(x) \in C_0^\infty(0, X_\epsilon)$ 及充分小的 $0 < \epsilon_2 < \frac{\alpha}{2C}$,

$$\begin{aligned}
(A_0u, u) &= \int_0^{X_\epsilon} a_n(x)|u^{(n)}|^2dx + \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{X_\epsilon} a_k(x)|u^{(k)}|^2dx \\
&\geq \alpha \parallel u^{(n)} \parallel^2 - \sum_{k=0}^{n-1} \max_{0<x<X_\epsilon} |u^{(k)}|^2 \int_0^{X_\epsilon} |a_k(x)|dx \\
&\geq \alpha \parallel u^{(n)} \parallel^2 - C\sum_{k=0}^{n-1} \max_{0<x<X_\epsilon} |u^{(k)}|^2 \\
&\geq \alpha \parallel u^{(n)} \parallel^2 - C(\epsilon_2 \parallel u^{(n)} \parallel^2 + C_{\epsilon_2} \parallel u \parallel^2) \\
&\geq (\alpha - C\epsilon_2) \parallel u^{(n)} \parallel^2 - CC_{\epsilon_2} \parallel u \parallel^2 \\
&\geq \frac{\alpha}{2} \parallel u^{(n)} \parallel^2 - CC_{\epsilon_2} \parallel u \parallel^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\parallel u \parallel^2_{W_2^n(0,X_\epsilon)} &= \sum_{k=0}^{n}\int_0^{X_\epsilon} |u^{(k)}|^2dx = \parallel u^{(n)} \parallel^2 + \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{X_\epsilon} |u^{(k)}|^2dx \\
&\leq \parallel u^{(n)} \parallel^2 + X_\epsilon \sum_{k=0}^{n-1} \max_{0<x<X_\epsilon} |u^{(k)}|^2 \\
&\leq \parallel u^{(n)} \parallel^2 + X_\epsilon(\epsilon_3 \parallel u \parallel^2 + C_{\epsilon_3} \parallel u \parallel^2) \\
&\leq (1 + \epsilon_3X_\epsilon) \parallel u^{(n)} \parallel^2 + X_\epsilon C_{\epsilon_3} \parallel u \parallel^2 \\
&\leq \frac{2(1+\epsilon_3X_\epsilon)}{\alpha}((A_0u, u) + CC_\epsilon \parallel u \parallel^2) + X_\epsilon C_{\epsilon_3} \parallel u \parallel^2 \\
&\leq \frac{2(1+\epsilon_3X_\epsilon)}{\alpha}(A_0u, u) + (\frac{2CC_\epsilon(1+\epsilon_3X_\epsilon)}{\alpha} + X_\epsilon C_{\epsilon_3}) \parallel u \parallel^2 \\
&\leq C_2(A_0u, u) + C_3 \parallel u \parallel^2
\end{aligned}$$

因此, 能量空间 H_{A_0} 中的任何有界集都是空间 $W_2^n(0, X_\epsilon)$ 中的有界集, 从而是空间 $L^2(0, X_\epsilon)$ 中的预紧集. 由引理 6.1.2 知, $\sigma_e(A_{(0,X_\epsilon)}) = \phi$. 再由式 (6.4.7) 知, $\sigma_e(A) = \phi$. □

在定理 6.4.2 中如果 $p=0$, 我们可以得到文献 [78] 中的定理 6.3.8, 即

推论 6.4.1 若对称微分算式 (6.4.1) 中的系数 $a_k(x)$ 满足以下条件:

(1) $a_k(x)\in W_2^k(0,X), 0\le k\le n, \forall X>0, \inf\limits_{0<x<\infty} a_n(x)=\alpha>0, 0<x<\infty$;

(2) $\sup\limits_{0<x<\infty}\int_x^{x+1}|a_k(t)|dt<\infty, 1\le k\le n$;

(3) $\inf\limits_{0<x<\infty}\int_x^{x+1}a_0^-(t)dt>-\infty$,

则由式 (6.4.1) 所生成的最小算子 A_0 的任何自伴扩张的谱是离散的充要条件是对于确定的 ω, 有

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\int_x^{x+\omega}a_0(t)dt=\infty$.

在定理 6.4.2 中如果 $n=1, a_1(x)\equiv 1, p=0$, 我们可以得到著名的 A.M.Molchanov 判定定理, 即

推论 6.4.2 设二阶微分算式

$$\tau(y)=-y''+q(x)y, x\in(0,\infty)$$

若系数 $q(x)$ 有下界, 则由上式生成的算子 $A_0u=\tau u, D(A_0)=C_0^\infty(0,\infty)$ 的任何自伴扩张的谱是离散的充要条件是对于确定的 $\omega>0$,

$$\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+\omega}q(t)dt=\infty.$$

在定理 6.4.2 中如果 $a_n(x)=1, a_{n-1}(x)=\cdots=a_2(x)=a_1(x)=0, p=0$, 我们可以得到 A.M.Molchanov 的另一著名判定定理, 即

推论 6.4.3 设 $2n$ 阶二项微分算式

$$\tau(y)=(-1)^n y^{(2n)}+q(x)y, x\in(0,\infty)$$

若系数 $q(x)$ 有下界, 则由上式生成的算子 $A_0u=\tau u, D(A_0)=C_0^\infty(0,\infty)$ 的任何自伴扩张的谱是离散的充要条件是对于确定的 $\omega>0$,

$$\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+\omega}q(t)dt=\infty.$$

例子 6.4.1 $A_0u = -[(\cos x + a)u^{(3)}]^{(3)} + [(\sin x + b)u^{(2)}]^{(2)} - [(x+c)^r u']' + (\cos x + d)u, D(A_0) = C_0^\infty(0,\infty)$. 当 $a = 1, b > 1, c > 0, d = 1, r > 0$ 时, 上述算子 A_0 的系数符合定理 6.4.1 的条件, 故 A_0 的任何自伴扩张的谱是离散的.

第七章　具特殊系数 J-对称微分算子谱的离散性

J-自伴微分算子的谱理论的研究起源于人们对耗散算子和具有复势能的 Schrödinger 算子的研究. J-对称微分算子在某些方面的性质可能较对称微分算子有更为简洁明了, 比如每个 J-对称微分算子都有 J-自伴扩张. 但在许多方面 J-对称微分算子比对称微分算子的性质更为复杂, 比如复系数 Sturm-Liouville 问题的点型与圆型属性就完全异于实系数情形, 细节可参看 [71].

当算子是自伴或 J-自伴时, 它的剩余谱是空集, 从而只需研究其点谱和连续谱. J-自伴算子是非对称算子, 从而, 它不是自伴算子, 它的谱可能不仅限于实轴上. 因为自伴算子的谱可分为离散谱和本质谱两部分, 所以J-自伴微分算子谱的定性分析类似于自伴微分算子的谱分析, 也就是给出 J-自伴微分算子谱的分布即点谱、连续谱的存在围范, 离散谱、本质谱的存在区间, 判断 J-自伴微分算子谱的离散性以及相应的特征函数系的完备性等等. 本章我们利用算子的方法、分析方法和直和分解的方法, 研究了一类具复指数系数的偶数阶对称微分算子的谱, 得到了微分算子系数的实部与虚部都非负是算子的谱是离散的一个充分条件; 进一步得到了微分算子系数的实部与虚部满足一般条件时其谱是离散的一些充分条件. 另外, 还研究了具复幂指积系数、复欧指积系数的 J-对称微分算式生成的算子谱的离散性, 得到了 J-自伴微分算子系数的实部或虚部满足某些条件时其本质谱是空集, 即 J-自伴微分算子的谱是离散的.

7.1　预备知识

$$C^l(x_1,x_2)=\{y(x)\in C(x_1,x_2)|y^{(l)}(x)\in C(x_1,x_2)\},$$

$$\dot{C}^l(x_1,x_2)=\{y(x)\in C^l(x_1,x_2)|\parallel y(x)\parallel_{\dot{C}^l(x_1,x_2)}<\infty\},$$

$$\parallel y(x)\parallel_{\dot{C}^l(x_1,x_2)}=\sum_{k=0}^{l}\sup_{x_1<x<x_2}|y^{(k)}(x)|,$$

$$C_p^l(x_1,x_2)=\{y(x)\in C^l(x_1,x_2)|\parallel y(x)\parallel_{W_p^l(x_1,x_2))}<\infty\},$$

$$\parallel y(x)\parallel_{W_p^l(x_1,x_2))}=(\sum_{k=0}^{l}\int_{x_1}^{x_2}|y^{(k)}(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}.$$

Banach 空间$W_p^l(x_1,x_2)$ 是$C_p^l(x_1,x_2)$的范数$\|\cdot\|_{W_p^l(x_1,x_2)}$下的完备化空间.

引理 7.1.1 [50], [78]　若 $0\le k<l$, $1<p<\infty$, 则空间 $W_p^l(x_1,x_2)(-\infty\le x_1<x_2\le+\infty)$ 是

连续嵌入到空间 $\dot{C}^l(x_1,x_2)$ 中且对于任意的 $\epsilon>0$, 存在常数 C_ϵ, 使得

$$\| y \|_{\dot{C}^k(x_1,x_2)} \le \epsilon \| y^{(l)} \|_{L^p(x_1,x_2)} + C_\epsilon \| y \|_{L^p(x_1,x_2)}, \forall y(x) \in W_p^l(x_1,x_2),$$

即

$$\sum_{i=0}^{k} \sup_{x_1<x<x_2} |y^{(i)}(x)| \le \epsilon \Big(\int_{x_1}^{x_2} |y^{(l)}(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} + C_\epsilon \Big(\int_{x_1}^{x_2} |y(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}, \forall y(x) \in W_p^l(x_1,x_2).$$

若 (x_1,x_2) 是有限区间, 则由 $W_p^l(x_1,x_2)$ 到 $\dot{C}^l(x_1,x_2)$ 的嵌入是紧的.

定义 7.1.1 [34], [78] 定义域 $D(T)$ 在 *Hilbert* 空间中 H 稠定的算子 T 称为 J-对称的, 如果对于 H 中的复共轭 J, 有 $JTJ \subset T^*$, 其中T^* 是 T 的共轭算子, $Jf(x)=\overline{f(x)}$. 特别地, 当 $JTJ=T^*$ 时, 我们把算子 T 称为 J-自伴算子.

引理 7.1.2 [78] 若 *Hilbert* 空间 H 中的闭线性算子 T 的预解算子是全连续的, 则 T 的谱是离散的; 若 T 是自伴算子, 则其逆也成立.

引理 7.1.3 [78] 设 H 是 *Hilbert* 空间, $T_1 \in \mathcal{B}(H), T_2 \in \mathcal{B}(H)$. 若 T_1 和 T_2 中有一个是全连续算子, 则 T_1T_2 也是全连续算子.

引理 7.1.4 [78] 设 T_1, T_2 是 *Hilbert* 空间 H 中的闭稠定算子且满足如下条件

(i) T_1, T_2 是 H 中的对称的半有界算子;

(ii) $D(T_1)=D(T_2)$;

(iii) 对于某 λ_0 复数, $R(T_1+iT_2-\lambda_0 T)$ 在 H 中是稠定的;

(iv) 对称算子 T_1+T_2 的 *Friedrichs* 扩张的预解算子是全连续算子,

则算子 $T=T_1+iT_2$ 存在闭包 $\bar{T}$ 且对于 $\lambda_0 \in \rho(\bar{T})$, $(\bar{T}-\lambda_0 I)^{-1}$ 是全连续算子.

引理 7.1.5 [78] 具有有限相等亏指数的 J-对称算子的所有自伴扩张的本质谱相同.

引理 7.1.6 [50], [78] 令 $a[u,v]$ 和 $b[u,v]$ 是闭的下方有界的半双线性型, $D(a) \subset D(b), a[u,u] \ge b[u,u], \forall u \in D(a)$.

若 A 和 B 分别是由 $a[u,v]$ 和 $b[u,v]$ 生成的自伴算子, 其中 $a[u,v]=(Au,v), u,v \in D(a)$, $b[u,v]=(Bu,v), u,v \in D(b)$.

若对于某 $\lambda(\infty<\lambda<\infty)$, 有 $\sigma_e(B)\cap(-\infty,\lambda)=\phi$, 则 $\sigma_e(A)\cap(-\infty,\lambda)=\phi$.

定义 7.1.2 [78] 复数 $\lambda \in \mathbf{C}$ 称为算子 A 的正则型点, 如果存在 $k = k(\lambda) > 0$, 使得 $\| (A-\lambda I)x \| \geq k(\lambda) \| x \|$, $\forall x \in D(A)$. 算子 A 的所有正则型点所组成的集合称为算子 A 的正则型域, 记为 $\Pi(A)$.

引理 7.1.7 [34] 若 $K(A) = \overline{\{(Ay,y) | \forall y \in D(A), \| y \| = 1\}}$, 则 $\mathbf{C} \setminus K(A) \subset \Pi(A)$, 其中 $\Pi(A)$ 表示 A 的正则型域. 当 $\sigma_r(A) = \phi$ 时, 则 $\sigma(A) \subset K(A)$.

引理 7.1.8 [78] J-自伴的线性算子 A 的剩余谱是空集, 即 $\sigma_r(A) = \phi$.

引理 7.1.9 [33] 设

$$Ly(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (a_k e^{\alpha x} y^{(k)}(x))^{(k)}, y(x) \in C_0^{\infty}(a,\infty).$$

若 $a_n > 0, a_k \geq 0$, 则最小算子 L_0 的所有自伴扩张的谱是离散的, 其中 L_0 是由 L 在空间 $C_0^{\infty}(a,\infty)$ 中生成的算子.

引理 7.1.10 [33] 设

$$Ly(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (a_k e^{\alpha x} y^{(k)}(x))^{(k)}, y(x) \in C_0^{\infty}(a,\infty).$$

若 $a_n > 0, a_k \in \mathbb{R}, k = 0,1,\ldots,n-1$, $a_n > \sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{2}{\alpha})^{2k} |a_{n-k}|$, 则最小算子 L_0 的所有自伴扩张的谱是离散的, 其中 L_0 是由 L 在空间 $C_0^{\infty}(a,\infty)$ 中生成的算子.

7.2 复指数函数系数J-对称微分算子谱的离散性

本节研究如下 $2n$ 阶对称微分算式所生成的微分算子谱的离散性

$$(\tau y)(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k [p_k(x) y^{(k)}(x)]^{(k)}, x \in (a,\infty) \tag{7.2.1}$$

其中 $p_k(x) = (a_k(x) + ib_k(x))e^{\alpha x}, \alpha > 0$.

若 $a_k(x) = a_k, b_k(x) = b_k \in \mathbb{R}$, 则我们把式 (7.2.1) 称为 J-对称指数函数系数微分算式, 由 J-对称指数函数系数微分算式所生成的算子称为 J-对称指数函数系数微分算子.

定理 7.2.1 设

$$T_0 y(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k [(a_k + ib_k) e^{\alpha x} y^{(k)}(x)]^{(k)}, D(T_0) = C_0^{\infty}(a,\infty).$$

若算子T_0的系数 $a_k, b_k, k = 0, 1, \ldots, n$ 满足 $a_n > 0, b_n > 0$, $a_k \geq 0, b_k \geq 0$, $k = 0, 1, \cdots, n-1$, 则 T_0 的所有的自伴扩张 T 的本质谱 $\sigma_e(T)$ 是空的, 即 T_0 的所有的自伴扩张 T 的谱 $\sigma(T)$ 是离散的.

证明 令

$$\tau_1 y(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k[a_k e^{\alpha x} y^{(k)}(x)]^{(k)}, D(T_0) = C_0^\infty(a, \infty),$$
$$\tau_2 y(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k[b_k e^{\alpha x} y^{(k)}(x)]^{(k)}, D(T_0) = C_0^\infty(a, \infty).$$

记 T_{10}, T_{20}, T_0 分别是由 $\tau_1 y(x), \tau_2 y(x), \tau y(x)$ 所生成的最小算子, 即

$$T_{10} y(x) = \tau_1 y(x), y(x) \in D(T_{10}) = C_0^\infty(a, \infty), \tag{7.2.2}$$

$$T_{10} y(x) = \tau_2 y(x), y(x) \in D(T_{10}) = C_0^\infty(a, \infty), \tag{7.2.3}$$

$$T_0 y(x) = \tau y(x), y(x) \in D(T_{10}) = C_0^\infty(a, \infty). \tag{7.2.4}$$

下面我们证明 T_{10}, T_{20}, T_0 满足引理 7.1.4 的条件 $(i)-(iv)$.

由式 (7.2.2)-(7.2.4) 知, T_{10}, T_{20} 是空间 $L^2[a, \infty)$ 中的对称稠定的算子且 $D(T_{10}) = D(T_{20})$, 这说明 T_{10}, T_{20} 满足引理 7.1.4 中的条件 (ii).

对于任意的 $y(x) \in C_0^\infty, k = 1, 2, \ldots, n$, 有

$$\begin{aligned}\int_a^\infty e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2 dx &= \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2|_a^\infty - \int_a^\infty e^{\alpha x} y^{(k+1)}\overline{y^{(k)}} dx) - \int_a^\infty e^{\alpha x} y^{(k)}\overline{y^{(k+1)}} dx)\\ &\leq \frac{2}{\alpha}[\int_a^\infty e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2 dx \int_a^\infty e^{\alpha x}|y^{(k+1)}|^2 dx]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

更进一步, 我们有

$$\int_a^\infty e^{\alpha x}|y^{(k+1)}|^2 dx \geq (\frac{2}{\alpha})^2 \int_a^\infty e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2 dx.$$

从而,

$$\begin{aligned}\int_a^\infty e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2 dx &\geq (\frac{\alpha}{2})^{2k}\int_a^\infty e^{\alpha x}|y|^2 dx\\ &\geq (\frac{\alpha}{2})^{2k} e^{a\alpha}\int_a^\infty |y|^2 dx.\end{aligned} \tag{7.2.5}$$

由式 (7.2.5) 及任意的 $y(x) \in C_0^\infty$ 知,

$$Re(T_0y,y) = (T_{10}y,y) = \sum_{k=0}^{n}\int_a^\infty a_k e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx$$
$$\geq \int_a^\infty a_n e^{\alpha x}|y^{(n)}|^2dx \geq a_n(\frac{\alpha}{2})^{2n}e^{a\alpha} \parallel y \parallel^2. \tag{7.2.6}$$

$$Im(T_0y,y) = (T_{20}y,y) = \sum_{k=0}^{n}\int_a^\infty b_k e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx$$
$$\geq \int_a^\infty b_n e^{\alpha x}|y^{(n)}|^2dx \geq b_n(\frac{\alpha}{2})^{2n}e^{a\alpha} \parallel y \parallel^2. \tag{7.2.7}$$

这说明 T_{10}, T_{20} 是下方有界的. 因此, T_{10}, T_{20} 满足引理 7.1.4 中的条件 (i).

由式 (7.2.2)-(7.2.4) 知, $T_0 = T_{10} + iT_{20}$.

由式 (7.2.6) 和 (7.2.7) 知,

$$\delta(T_0) \subset \{\lambda = \beta + i\gamma | \beta \geq a_n(\frac{\alpha}{2})^{2n}e^{a\alpha}, \gamma \geq b_n(\frac{\alpha}{2})^{2n}e^{a\alpha}\}.$$

令 $\lambda_0 = a_n(\frac{\alpha}{2})^{2n}e^{a\alpha} - 1 + i(b_n(\frac{\alpha}{2})^{2n}e^{a\alpha} - 1)$, 则 $\lambda_0 \in \rho(T_0)$, 因此, $\rho(T_0) \neq \phi$, $R(T_{10} + iT_{20} - \lambda_0 I)$ 在 $L^2[a,\infty)$ 中是稠定的, 这说明 T_{10}, T_{20} 满足引理 7.1.4 的条件 (iii).

令 $T'y = T_{10}y + T_{20}y$, 则 $T'y = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k[(a_k + b_k)e^{\alpha x}y^{(k)}(x)]^{(k)}, D(T_0) = C_0^\infty(a,\infty)$, 且 T' 是稠定下半有界对称算子.

由引理 7.1.9 知, T' 的所有自伴扩张的谱是离散的. 由引理 7.1.2 知, T' 的任一自伴扩张的预解算子是全连续的, 进而, T' 的任一 Friedrichs 扩张的预解算子也是全连续的, 这说明 T_{10}, T_{20} 满足引理 7.1.4 的条件 (iv).

综上所述, 对于复数 $\lambda_0 = a_n(\frac{\alpha}{2})^{2n}e^{a\alpha} - 1 + i(b_n(\frac{\alpha}{2})^{2n}e^{a\alpha} - 1) \in \rho(T_0)$, $(T_0 - \lambda_0 I)^{-1}$ 是全连续算子.

对于任意的 $\lambda \in \rho(T_0)$, 有

$$\begin{aligned}(T_0 - \lambda I)^{-1} &= (T_0 - \lambda I)^{-1}(T_0 - \lambda_0 I)(T_0 - \lambda_0 I)^{-1}\\ &= (T_0 - \lambda I)^{-1}[(T_0 - \lambda I) + (\lambda - \lambda_0)I](T_0 - \lambda_0 I)^{-1}\\ &= (T_0 - \lambda_0 I)^{-1} + (\lambda - \lambda_0)(T_0 - \lambda I)^{-1}(T_0 - \lambda_0 I)^{-1}.\end{aligned}$$

由 $(T_0 - \lambda_0 I)^{-1}$ 是全连续算子, $\lambda \in \rho(T_0)$ 及引理 7.1.3 知, $(T_0 - \lambda I)^{-1}$ 是全连续算子. 由引理 7.1.2 和 7.1.5 知, $\sigma_e(T) = \sigma_e(T_0) = \phi$, 其中 T 是 T_0 的任一的 J-自伴扩张. □

定理 7.2.2 设

$$T_0y=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k[(a_k+ib_k)e^{\alpha x}y^{(k)}(x)]^{(k)}, D(T_0)=C_0^\infty(a,\infty).$$

若算子 T_0 的系数 $a_k,b_k,k=0,1,\ldots,n$ 满足

(i) $a_n>0,b_n>0$;

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\int_x^{x+1}|a_k+b_k|e^{\alpha t}dt=0,k=0,1,\ldots,n-1,$

则 T_0 的所有的 J-自伴扩张 T 的谱是离散的.

证明 令

$$\tau_1y(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k[a_ke^{\alpha x}y^{(k)}(x)]^{(k)}, D(T_0)=C_0^\infty(a,\infty),$$
$$\tau_2y(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k[b_ke^{\alpha x}y^{(k)}(x)]^{(k)}, D(T_0)=C_0^\infty(a,\infty),$$
$$\tau_3y(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^n[(a_n+b_n)e^{\alpha x}y^{(n)}(x)]^{(n)}, D(T_0)=C_0^\infty(a,\infty).$$

并记 T_{10},T_{20},T_{30},T_0 为由 $\tau_1y(x),\tau_2y(x),\tau_3y(x),\tau y(x)$ 所生成的最小算子, 即

$$T_{10}y(x)=\tau_1y(x),\ y(x)\in D(T_{10})=C_0^\infty(a,\infty),$$
$$T_{20}y(x)=\tau_2y(x),\ y(x)\in D(T_{10})=C_0^\infty(a,\infty),$$
$$T_{30}y(x)=\tau_3y(x),\ y(x)\in D(T_{10})=C_0^\infty(a,\infty),$$
$$T_0y(x)=\tau y(x),\ y(x)\in D(T_{10})=C_0^\infty(a,\infty).$$

由条件 (ii) 知, 对于任意给定的 $\forall\epsilon>0$, 存在 $N>0$, 使得

$$\int_x^{x+1}|a_k+b_k|e^{\alpha t}dt<\epsilon. \tag{7.2.8}$$

令 $T'=T_{10}+T_{20}$, 则 T' 可以分解为 $T'=T'_{[a,N)}\oplus T'_{[N,\infty)}$, 即$T'y=T'_{[a,N)}y+T'_{[N,\infty)}y$. 设 $\widehat{T}'$, $\widehat{T}'_{[a,N)}$ 和 $\widehat{T}'_{[N,\infty)}$ 是T', $T'_{[a,N)}$ 和 $T'_{[N,\infty)}$ 的 Friedrichs 扩张, 其中

$$T'_{[a,N)}y=T'y, D(T'_{[a,N)})=C_0^\infty(a,N),$$
$$T'_{[N,\infty)}y=T'y, D(T'_{[N,\infty)})=C_0^\infty(N,\infty),$$

则 $\sigma_e(\widehat{T'}) = \sigma_e(\widehat{T'}_{[a,N)}) \cup \sigma_e(\widehat{T'}_{[N,\infty)})$. 由 $\sigma_e(\widehat{T'}_{[a,N)}) = \phi$ 知,

$$\sigma_e(\widehat{T'}) = \sigma_e(\widehat{T'}_{[N,\infty)}). \tag{7.2.9}$$

同理可得,

$$\sigma_e(\widehat{T}_0) = \sigma_e(\widehat{T}_{0,[N,\infty)}), \tag{7.2.10}$$

其中 $\widehat{T}_0$, $\widehat{T}_{0,[N,\infty)}$ 分别是 T_0, $T_{0,[N,\infty)}$ 的 Friedrichs 扩张.

对于任意的 $y(x) \in C_0^\infty(N,\infty)$, 有

$$\begin{aligned}(\widehat{T'}_{[N,\infty)}y,y) &= \int_N^\infty (a_n+b_n)e^{\alpha x}|y^{(n)}|^2dx + \sum_{k=0}^{n-1}\int_N^\infty (a_k+b_k)e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx \\ &\geq (\widehat{T}_{30,[N,\infty)}y,y) - \sum_{k=0}^{n-1}\int_N^\infty |a_k+b_k|e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx.\end{aligned} \tag{7.2.11}$$

由引理 7.1.1 及式 (7.2.8) 知, 对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在常数 C_ϵ, 使得

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-1}\int_N^\infty |a_k+b_k|e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{v=N}^{\infty}\int_v^{v+1} |a_k+b_k|e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{v=N}^{\infty}(\max_{v\leq x\leq v+1}|y^{(k)}|^2)\int_v^{v+1}|a_k+b_k|e^{\alpha x}dx \\ &\leq \epsilon\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{v=N}^{\infty}(\max_{v\leq x\leq v+1}|y^{(k)}|^2) \\ &\leq \epsilon\sum_{v=N}^{\infty}\| y \|^2_{C^{n-1}[v,v+1]} \\ &\leq \epsilon\sum_{v=N}^{\infty}(\epsilon \| y^{(n)} \|_{L^2[v,v+1]} + C_\epsilon \| y \|_{L^2[v,v+1]})^2 \\ &\leq 2\epsilon(\epsilon^2 \| y^{(n)} \|_{L^2[v,v+1]} + C_\epsilon^2 \| y \|_{L^2[v,v+1]})\end{aligned} \tag{7.2.12}$$

将式 (7.2.12) 代入式 (7.2.11) 中可得, 对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在充分大的正数 N, 使得

$$(\widehat{T'}_{[N,\infty)}y,y) \geq (\widehat{T}_{30,[N,\infty)}y,y), \quad \forall y(x) \in C_0^\infty(N,\infty). \tag{7.2.13}$$

由引理 7.1.9 知, T_{30} 的所有的自伴扩张的谱是离散的. 特别地, T_{30} 所有的 Friedrichs 扩张 $\widehat{T_{30}}$ 的本质谱 $\sigma_e(\widehat{T_{30}})$ 是空集. 由式 (7.2.9), (7.2.10), (7.2.13) 及引理 7.1.6 知, $\widehat{T'}$ 的谱

是离散的, 进而, 由引理 7.1.5 知, T' 的所有自伴扩张的谱是离散的. 应用与定理 7.2.1 相似的过程我们可得, T_0 的任意的自伴扩张的谱是离散的. □

定理 7.2.3 *若算子*

$$T_0 y = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k [(a_k + ib_k) e^{\alpha x} y^{(k)}(x)]^{(k)}, D(T_0) = C_0^\infty(a, \infty)$$

的系数 $a_k, b_k, k = 0, 1, \ldots, n$ *满足*

(i) $a_n > 0, b_n > 0$;

(ii) $a_n > \sum_{k=1}^{n} (\frac{2}{\alpha})^{2k} |a_{n-k}|,\ b_n > \sum_{k=1}^{n} (\frac{2}{\alpha})^{2k} |b_{n-k}|$,

则 T_0 *的所有的* J-*自伴扩张* T *的谱是离散的.*

证明 应用与定理 7.2.1 相同的过程, 我们可以得到本定理的证明, 只是需要注意到引理 7.1.10 及如下事实: 由条件 (2) 知, 存在 $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$, 使得

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} (\frac{2}{\alpha})^{2k} |a_{n-k}| + \delta_1, \quad b_n = \sum_{k=1}^{n} (\frac{2}{\alpha})^{2k} |b_{n-k}| + \delta_2.$$

对于任意的 $y(x) \in C_0^\infty$, 有

$$\begin{aligned}
Re(T_0 y, y) = (T_{10} y, y) &= \int_a^\infty a_n e^{\alpha x} |y^{(n)}|^2 dx + \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^\infty a_k e^{\alpha x} |y^{(k)}|^2 dx \\
&= \int_a^\infty (\sum_{k=1}^{n} (\frac{2}{\alpha})^{2k} |a_{n-k}| + \delta_1) e^{\alpha x} |y^{(n)}|^2 dx + \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^\infty a_k e^{\alpha x} |y^{(k)}|^2 dx \\
&= \int_a^\infty (\sum_{k=0}^{n-1} (\frac{2}{\alpha})^{2(n-k)} |a_k| + \delta_1) e^{\alpha x} |y^{(n)}|^2 dx + \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^\infty a_k e^{\alpha x} |y^{(k)}|^2 dx \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^\infty (|a_k| + a_k) e^{\alpha x} |y^{(k)}|^2 dx + \delta_1 \int_a^\infty e^{\alpha x} |y^{(n)}|^2 dx \\
&\geq \int_a^\infty \delta_1 e^{\alpha x} |y^{(n)}|^2 dx \geq \delta_1 e^{a\alpha} (\frac{\alpha}{2})^{2n} \int_a^\infty |y|^2 dx,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Im(T_0y,y)=(T_{20}y,y)&=\int_a^\infty(\sum_{k=1}^{n}(\frac{2}{\alpha})^{2k}|b_{n-k}|+\delta_2)e^{\alpha x}|y^{(n)}|^2dx+\sum_{k=0}^{n-1}\int_a^\infty b_ke^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx\\
&=\int_a^\infty(\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{2}{\alpha})^{2(n-k)}|b_k|+\delta_2)e^{\alpha x}|y^{(n)}|^2dx+\sum_{k=0}^{n-1}\int_a^\infty b_ke^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\int_a^\infty(|b_k|+b_k)e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx+\delta_2\int_a^\infty e^{\alpha x}|y^{(n)}|^2dx\\
&\geq\delta_2e^{a\alpha}(\frac{\alpha}{2})^{2n}\int_a^\infty|y|^2dx,
\end{aligned}
$$

这说明 T_{10},T_{20} 是下半有界的算子. □

定理 7.2.4 设

$$
T_0y=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k[(a_k+ib_k)e^{\alpha x}y^{(k)}(x)]^{(k)},D(T_0)=C_0^\infty(a,\infty).
$$

若算子 T_0 的系数 $a_k,b_k,k=0,1,\ldots,n$ 满足

(i) $a_n>0,b_n>0$;

(ii) $a_k\geq 0,n=0,1,\ldots,n-1,\ b_n>\sum_{k=1}^{n}(\frac{2}{\alpha})^{2k}|b_{n-k}|$,

则 T_0 的所有的 J-自伴扩张 T 的谱是离散的.

证明 应用与定理 7.2.1 相同的过程, 我们可以得到本定理的证明, 只是需要注意到如下事实: 由条件 (ii) 知, 存在 $\delta>0$, 使得

$$
b_n=\sum_{k=1}^{n}(\frac{2}{\alpha})^{2k}|b_{n-k}|+\delta.
$$

对于任意的 $y(x)\in C_0^\infty$, 有

$$
\begin{aligned}
Re(T_0y,y)=(T_{10}y,y)&=\sum_{k=0}^{n}\int_a^\infty a_ke^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx\\
&\geq\int_a^\infty a_ne^{\alpha x}|y^{(n)}|^2dx\geq a_n(\frac{\alpha}{2})^{2n}e^{a\alpha}\parallel y\parallel^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Im(T_0y,y)=(T_{20}y,y)&=\int_a^\infty(\sum_{k=1}^{n}(\frac{2}{\alpha})^{2k}|b_{n-k}|+\delta_2)e^{\alpha x}|y^{(n)}|^2dx+\sum_{k=0}^{n-1}\int_a^\infty b_ke^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx\\
&=\int_a^\infty(\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{2}{\alpha})^{2(n-k)}|b_k|+\delta_2)e^{\alpha x}|y^{(n)}|^2dx+\sum_{k=0}^{n-1}\int_a^\infty b_ke^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\int_a^\infty(|b_k|+b_k)e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx+\delta\int_a^\infty e^{\alpha x}|y^{(n)}|^2dx\\
&\ge\delta e^{a\alpha}(\frac{\alpha}{2})^{2n}\int_a^\infty|y|^2dx,
\end{aligned}
$$

这说明 T_{10},T_{20} 是下半有界的算子. □

定理 7.2.5 设

$$
T_0y=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k[(a_k+ib_k)e^{\alpha x}y^{(k)}(x)]^{(k)},D(T_0)=C_0^\infty(a,\infty).
$$

若系数 $a_k,b_k,k=0,1,\ldots,n$ 满足

(i) $a_n>0,b_n>0;$

(ii) $a_n>\sum_{k=1}^{n}(\frac{2}{\alpha})^{2k}|a_{n-k}|$, $b_k\ge0,n=0,1,\ldots,n-1,$

则 T_0 的所有的 J-自伴扩张 T 的谱是离散的.

证明 应用与定理 7.2.1 相同的过程, 我们可以得到本定理的证明, 只是需要注意到如下事实: 由条件 (ii) 知, 存在 $\delta>0$, 使得

$$
a_n=\sum_{k=1}^{n}(\frac{2}{\alpha})^{2k}|a_{n-k}|+\delta.
$$

对于任意的 $y(x)\in C_0^\infty$, 有

$$
\begin{aligned}
Re(T_0y,y)=(T_{10}y,y)&=\int_a^\infty(\sum_{k=1}^{n}(\frac{2}{\alpha})^{2k}|a_{n-k}|+\delta_2)e^{\alpha x}|y^{(n)}|^2dx+\sum_{k=0}^{n-1}\int_a^\infty a_ke^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx\\
&=\int_a^\infty(\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{2}{\alpha})^{2(n-k)}|a_k|+\delta_2)e^{\alpha x}|y^{(n)}|^2dx+\sum_{k=0}^{n-1}\int_a^\infty a_ke^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\int_a^\infty(|a_k|+a_k)e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx+\delta\int_a^\infty e^{\alpha x}|y^{(n)}|^2dx\\
&\ge\delta e^{a\alpha}(\frac{\alpha}{2})^{2n}\int_a^\infty|y|^2dx,
\end{aligned}
$$

$$Im(T_0y,y)=(T_{20}y,y)=\sum_{k=0}^{n}\int_a^{\infty}b_ke^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx\geq\int_a^{\infty}b_ne^{\alpha x}|y^{(n)}|^2dx\geq b_n(\frac{\alpha}{2})^{2n}e^{a\alpha}\parallel y\parallel^2,$$

这说明 T_{10},T_{20} 是下半有界的算子. □

7.3 复幂指积系数J-对称微分算子谱的离散性

本节研究如下 $2n$ 阶对称微分算式所生成的微分算子谱的离散性

$$(\tau y)(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k[p_k(x)y^{(k)}(x)]^{(k)},x\in(a,\infty) \tag{7.3.1}$$

其中 $p_k(x)=(a_k(x)+ib_k(x))xe^{\alpha x},\alpha>0$.

若 $a_k(x)=a_k,b_k(x)=b_k\in\mathbb{R}$, 则我们把式 (7.3.1) 称为 J-对称幂指积系数微分算式, 由J-对称幂指积系数微分算式所生成的算子称为J-对称幂指积系数微分算子.

定理 7.3.1 设

$$T_0y(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k[(a_k+ib_k)xe^{\alpha x}y^{(k)}(x)]^{(k)}.D(T_0)=C_0^{\infty}(a,\infty)$$

若算子 T_0 的系数 $a_k,b_k,k=0,1,\ldots,n$ 满足 $a_n>0,b_n>0$, $a_k\geq0,b_k\geq0$, $k=0,1,\cdots,n-1$, 则 T_0 的所有的自伴扩张 T 的谱 $\sigma(T)$ 是离散的.

证明 令

$$\tau_1y(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k[a_kxe^{\alpha x}y^{(k)}(x)]^{(k)},D(T_0)=C_0^{\infty}(a,\infty),$$

$$\tau_2y(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k[b_kxe^{\alpha x}y^{(k)}(x)]^{(k)},D(T_0)=C_0^{\infty}(a,\infty).$$

记 T_{10},T_{20},T_0 分别是由 $\tau_1y(x),\tau_2y(x),\tau y(x)$ 所生成的最小算子, 即

$$T_{10}y(x)=\tau_1y(x),y(x)\in D(T_{10})=C_0^{\infty}(a,\infty), \tag{7.3.2}$$

$$T_{10}y(x)=\tau_2y(x),y(x)\in D(T_{10})=C_0^{\infty}(a,\infty), \tag{7.3.3}$$

$$T_0y(x) = \tau y(x), y(x) \in D(T_{10}) = C_0^\infty(a,\infty). \tag{7.3.4}$$

下面我们证明 T_{10}, T_{20}, T_0 满足引理 7.1.4 的条件 $(i)-(iv)$.

由式 (7.3.2)-(7.3.4) 知, T_{10}, T_{20} 是空间 $L^2[a,\infty)$ 中的对称稠定的算子且 $D(T_{10}) = D(T_{20})$. 这说明 T_{10}, T_{20} 满足引理 7.1.4 中的条件 (ii).

对于任意的 $y(x) \in C_0^\infty, k = 1, 2, \ldots, n$, 有

$$\int_a^\infty xe^{\alpha x}|y^{(k+1)}|^2dx \geq (\frac{\alpha}{4})^2 \int_a^\infty xe^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx.$$

更进一步, 我们有

$$\int_a^\infty xe^{\alpha x}|y^{(k+1)}|^2dx \geq (\frac{\alpha}{4})^{2k} \int_a^\infty xe^{\alpha x}|y|^2dx. \tag{7.3.5}$$

由式 (7.3.5) 及任意的 $y(x) \in C_0^\infty$ 知,

$$\begin{aligned} Re(T_0y,y) = (T_{10}y,y) &= \sum_{k=0}^n \int_a^\infty a_kxe^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx \\ &\geq \int_a^\infty a_nxe^{\alpha x}|y^{(n)}|^2dx \\ &\geq a_n(\frac{\alpha}{4})^{2n}ae^{a\alpha} \parallel y \parallel^2, \end{aligned} \tag{7.3.6}$$

$$\begin{aligned} Im(T_0y,y) = (T_{20}y,y) &= \sum_{k=0}^n \int_a^\infty b_kxe^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx \\ &\geq \int_a^\infty b_nxe^{\alpha x}|y^{(n)}|^2dx \\ &\geq b_n(\frac{\alpha}{4})^{2n}ae^{a\alpha} \parallel y \parallel^2. \end{aligned} \tag{7.3.7}$$

这说明 T_{10}, T_{20} 是下方有界的. 因此, T_{10}, T_{20} 满足引理 7.1.4 中的条件 (i).

由式 (7.3.2)-(7.3.4) 知, $T_0 = T_{10} + iT_{20}$.

由式 (7.3.6) 和 (7.3.7) 知,

$$\delta(T_0) \subset \{\lambda = \beta + i\gamma | \beta \geq a_n(\frac{\alpha}{4})^{2n}ae^{a\alpha}, \gamma \geq b_n(\frac{\alpha}{4})^{2n}ae^{a\alpha}\}.$$

令 $\lambda_0 = a_n(\frac{\alpha}{4})^{2n}ae^{a\alpha} - 1 + i(b_n(\frac{\alpha}{4})^{2n}ae^{a\alpha} - 1)$, 则 $\lambda_0 \in \rho(T_0)$, 因此, $\rho(T_0) \neq \phi$, $R(T_{10} + iT_{20} - \lambda_0 I)$ 在 $L^2[a,\infty)$ 中是稠定的, 这说明 T_{10}, T_{20} 满足引理 7.1.4 的条件 (iii).

令 $T'y = T_{10}y + T_{20}y$, 则 $T'y = \sum\limits_{k=0}^n (-1)^k[(a_k + b_k)xe^{\alpha x}y^{(k)}(x)]^{(k)}, D(T_0) = C_0^\infty(a,\infty)$, 且

T' 是稠定下半有界对称算子.

由定理 6.2.1 知, T' 的所有自伴扩张的谱是离散的. 由引理 7.1.2知, T' 的任一自伴扩张的预解算子是全连续的, 进而, T' 的任一 Friedrichs 扩张的预解算子也是全连续的, 这说明 T_{10}, T_{20} 满足引理 7.1.5 的条件 (iv).

综上所述, 对于复数 $\lambda_0 = a_n(\frac{\alpha}{4})^{2n}ae^{a\alpha} - 1 + i(b_n(\frac{\alpha}{4})^{2n}ae^{a\alpha} - 1) \in \rho(T_0)$, $(T_0 - \lambda_0 I)^{-1}$ 是全连续算子.

对于任意的 $\lambda \in \rho(T_0)$, 有

$$
\begin{aligned}
(T_0 - \lambda I)^{-1} &= (T_0 - \lambda I)^{-1}(T_0 - \lambda_0 I)(T_0 - \lambda_0 I)^{-1} \\
&= (T_0 - \lambda I)^{-1}[(T_0 - \lambda I) + (\lambda - \lambda_0)I](T_0 - \lambda_0 I)^{-1} \\
&= (T_0 - \lambda_0 I)^{-1} + (\lambda - \lambda_0)(T_0 - \lambda I)^{-1}(T_0 - \lambda_0 I)^{-1}.
\end{aligned}
$$

由 $(T_0 - \lambda_0 I)^{-1}$ 是全连续算子, $\lambda \in \rho(T_0)$ 及引理 7.1.3 知, $(T_0 - \lambda I)^{-1}$ 是全连续算子. 由引理 7.1.2 和引理 7.1.5 知, $\sigma_e(T) = \sigma_e(T_0) = \phi$, 其中 T 是 T_0 的任一的 J-自伴扩张. □

定理 7.3.2 设

$$
T_0 y = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k[(a_k + ib_k)xe^{\alpha x}y^{(k)}(x)]^{(k)}.D(T_0) = C_0^{\infty}(a, \infty).
$$

若算子 T_0的系数 $a_k, b_k, k = 0, 1, \dots, n$ 满足

(i) $a_n > 0, b_n > 0$;

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \int_x^{x+1} |a_k + b_k| xe^{\alpha t} dt = 0, k = 0, 1, \dots, n-1$,

则 T_0 的所有的 J-自伴扩张 T 的谱是离散的.

证明 应用与定理 7.2.2 相同的过程, 我们可以得到本定理的证明, 这里不再赘述. □

定理 7.3.3 设

$$
T_0 y = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k[(a_k + ib_k)xe^{\alpha x}y^{(k)}(x)]^{(k)}, D(T_0) = C_0^{\infty}(a, \infty)
$$

若算子T_0的系数 $a_k, b_k, k = 0, 1, \dots, n$ 满足

(i) $a_n > 0, b_n > 0$;

(ii) $a_n > \sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{4}{\alpha})^{2k}|a_{n-k}|$, $b_n > \sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{4}{\alpha})^{2k}|b_{n-k}|$,

则 T_0 的所有的 J-自伴扩张 T 的谱是离散的.

证明 应用与定理 7.2.3 相同的过程, 我们可以得到本定理的证明, 这里不再赘述. □

定理 7.3.4 设

$$T_0y=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k[(a_k+ib_k)xe^{\alpha x}y^{(k)}(x)]^{(k)}, D(T_0)=C_0^{\infty}(a,\infty).$$

若算子T_0的系数 $a_k,b_k,k=0,1,\ldots,n$ 满足

(i) $a_n>0,b_n>0$;

(ii) $a_k\geq 0,k=0,1,\ldots,n-1$, $b_n>\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{4}{\alpha})^{2k}|b_{n-k}|$,

则 T_0 的所有的 J-自伴扩张 T 的谱是离散的.

证明 应用与定理 7.2.4 相同的过程, 我们可以得到本定理的证明, 这里不再赘述. □

定理 7.3.5 设

$$T_0y=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k[(a_k+ib_k)xe^{\alpha x}y^{(k)}(x)]^{(k)}, D(T_0)=C_0^{\infty}(a,\infty).$$

若算子T_0的系数 $a_k,b_k,k=0,1,\ldots,n$ 满足

(i) $a_n>0,b_n>0$;

(ii) $a_n>\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{4}{\alpha})^{2k}|a_{n-k}|$, $b_k\geq 0,k=0,1,\ldots,n-1$,

则 T_0 的所有的 J-自伴扩张 T 的谱是离散的.

证明 应用与定理 7.2.5 相同的过程, 我们可以得到本定理的证明, 这里不再赘述. □

7.4 复欧指积系数J-对称微分算子谱的离散性

本节研究如下 $2n$ 阶对称微分算式所生成的微分算子谱的离散性

$$(\tau y)(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k[p_k(x)y^{(k)}(x)]^{(k)}, x\in(a,\infty) \tag{7.4.1}$$

其中 $p_k(x)=(a_k(x)+ib_k(x))x^{2k}e^{\alpha x},\alpha>0,a>\frac{2n}{\alpha}$.

若 $a_k(x)=a_k, b_k(x)=b_k\in\mathbb{R}$, 则我们把式 (7.4.1) 称为 J-对称欧指积系数微分算式, 由 J-对称欧指积系数微分算式所生成的算子称为 J-对称欧指积系数微分算子.

定理 7.4.1 设

$$T_0y(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k[(a_k+ib_k)x^{2k}e^{\alpha x}y^{(k)}(x)]^{(k)}, D(T_0)=C_0^\infty(a,\infty).$$

若算子 T_0 的系数 $a_k, b_k, k=0,1,\ldots,n$ 满足 $a_n>0, b_n>0$, $a_k\geq 0, b_k\geq 0$, $k=0,1,\cdots,n-1$, 则 T_0 的所有的 J-自伴扩张 T 的谱 $\sigma(T)$ 是离散的.

证明 令

$$\tau_1y(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k[a_kx^{2k}e^{\alpha x}y^{(k)}(x)]^{(k)}, D(T_0)=C_0^\infty(a,\infty),$$
$$\tau_2y(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k[b_kx^{2k}e^{\alpha x}y^{(k)}(x)]^{(k)}, D(T_0)=C_0^\infty(a,\infty).$$

记 T_{10}, T_{20}, T_0 分别是由 $\tau_1y(x), \tau_2y(x), \tau y(x)$ 所生成的最小算子, 即

$$T_{10}y(x)=\tau_1y(x), y(x)\in D(T_{10})=C_0^\infty(a,\infty), \tag{7.4.2}$$

$$T_{10}y(x)=\tau_2y(x), y(x)\in D(T_{10})=C_0^\infty(a,\infty), \tag{7.4.3}$$

$$T_0y(x)=\tau y(x), y(x)\in D(T_{10})=C_0^\infty(a,\infty). \tag{7.4.4}$$

下面我们证明 T_{10}, T_{20}, T_0 满足引理 7.1.4 的条件 $(i)-(iv)$.

由式 (7.4.2)-(7.4.4) 知, T_{10}, T_{20} 是空间 $L^2[a,\infty)$ 中的对称稠定的算子且 $D(T_{10})=D(T_{20})$. 这说明 T_{10}, T_{20} 满足引理 7.1.4中的条件 (ii).

对于任意的 $y(x)\in C_0^\infty, k=1,2,\ldots,n$, 有

$$\int_a^\infty x^{2k}e^{\alpha x}|y^{(k+1)}|^2dx\geq(\frac{\alpha}{4(k+1)})^2\int_a^\infty x^{2k}e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx.$$

更进一步, 我们有

$$\int_a^\infty x^{2k}e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx\geq(\frac{\alpha^k}{4(k+1)!})^2\int_a^\infty x^{2k}e^{\alpha x}|y|^2dx, k=0,1,\cdots,n. \tag{7.4.5}$$

由式 (7.4.5) 及任意的 $y(x)\in C_0^\infty$ 知,

$$
\begin{aligned}
Re(T_0y,y)=(T_{10}y,y)&=\sum_{k=0}^{n}\int_a^\infty a_kx^{2k}e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx\\
&\geq\int_a^\infty a_nx^{2k}e^{\alpha x}|y^{(n)}|^2dx\geq a_n(\frac{\alpha^k}{4(k+1)!})^2a^{2n}e^{a\alpha}\parallel y\parallel^2.
\end{aligned}
\qquad (7.4.6)
$$

$$
\begin{aligned}
Im(T_0y,y)=(T_{20}y,y)&=\sum_{k=0}^{n}\int_a^\infty b_kxx^{2k}e^{\alpha x}|y^{(k)}|^2dx\\
&\geq\int_a^\infty b_nx^{2k}e^{\alpha x}|y^{(n)}|^2dx\geq b_n(\frac{\alpha^k}{4(k+1)!})^2a^{2n}e^{a\alpha}\parallel y\parallel^2.
\end{aligned}
\qquad (7.4.7)
$$

这说明 T_{10},T_{20} 是下方有界的. 因此, T_{10},T_{20} 满足引理 7.1.4 中的条件 (i).

由式 (7.4.2)-(7.4.4) 知, $T_0=T_{10}+iT_{20}$.

由式 (7.4.6) 和 (7.4.7) 知,

$$\delta(T_0)\subset\{\lambda=\beta+i\gamma|\beta\geq a_n(\frac{\alpha^k}{4(k+1)!})^2a^{2n}e^{a\alpha},\gamma\geq b_n(\frac{\alpha^k}{4(k+1)!})^2a^{2n}e^{a\alpha}\}.$$

令 $\lambda_0=a_n(\frac{\alpha^k}{4(k+1)!})^2a^{2n}e^{a\alpha}-1+i(b_n(\frac{\alpha^k}{4(k+1)!})^2a^{2n}e^{a\alpha}-1)$, 则 $\lambda_0\in\rho(T_0)$, 因此, $\rho(T_0)\neq\phi$, $R(T_{10}+iT_{20}-\lambda_0I)$ 在 $L^2[a,\infty)$ 中是稠定的, 这说明 T_{10},T_{20} 满足引理 7.1.4 的条件 (iii).

令 $T'y=T_{10}y+T_{20}y$, 则 $T'y=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k[(a_k+b_k)xe^{\alpha x}y^{(k)}(x)]^{(k)}, D(T_0)=C_0^\infty(a,\infty)$, 且 T' 是稠定下半有界对称算子.

由定理 6.3.1 知, T' 的所有自伴扩张的谱是离散的. 由引理 7.1.9 知, T' 的任一自伴扩张的预解算子是全连续的, 进而, T' 的任一 Friedrichs 扩张的预解算子也是全连续的, 这说明 T_{10},T_{20} 满足引理 7.1.4 的条件 (iv).

综上所述, 对于复数 $\lambda_0=a_n(\frac{\alpha^k}{4(k+1)!})^2a^{2n}e^{a\alpha}-1+i(b_n(\frac{\alpha^k}{4(k+1)!})^2a^{2n}e^{a\alpha}-1)\in\rho(T_0)$, $(T_0-\lambda_0I)^{-1}$ 是全连续算子.

对于任意的 $\lambda\in\rho(T_0)$, 有

$$
\begin{aligned}
(T_0-\lambda I)^{-1}&=(T_0-\lambda I)^{-1}(T_0-\lambda_0I)(T_0-\lambda_0I)^{-1}\\
&=(T_0-\lambda I)^{-1}[(T_0-\lambda I)+(\lambda-\lambda_0)I](T_0-\lambda_0I)^{-1}\\
&=(T_0-\lambda_0I)^{-1}+(\lambda-\lambda_0)(T_0-\lambda I)^{-1}(T_0-\lambda_0I)^{-1}.
\end{aligned}
$$

由 $(T_0-\lambda_0I)^{-1}$ 是全连续算子, $\lambda\in\rho(T_0)$ 及引理 7.1.3 知, $(T_0-\lambda I)^{-1}$ 是全连续算子. 由引理 7.1.2 和引理 7.1.5 知, $\sigma_e(T)=\sigma_e(T_0)=\phi$, 其中 T 是 T_0 的任一的 J-自伴扩张. □

定理 7.4.2 设

$$T_0y=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k[(a_k+ib_k)x^{2k}e^{\alpha x}y^{(k)}(x)]^{(k)}, D(T_0)=C_0^\infty(a,\infty)$$

若算子 T_0 的系数 $a_k,b_k,k=0,1,\ldots,n$ 满足

(i) $a_n>0,b_n>0$;

(ii) $a_n>\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{4(n+1)}{\alpha})^{2k}|a_{n-k}|$, $b_n>\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{4(n+1)}{\alpha})^{2k}|b_{n-k}|$,

则 T_0 的所有的 J-自伴扩张 T 的谱是离散的.

证明 本定理的证明与定理 7.4.1 相同的过程, 我们这里不再赘述. □

定理 7.4.3 设

$$T_0y=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k[(a_k+ib_k)x^{2k}e^{\alpha x}y^{(k)}(x)]^{(k)}, D(T_0)=C_0^\infty(a,\infty).$$

若算子 T_0 的系数 $a_k,b_k,k=0,1,\ldots,n$ 满足

(i) $a_n>0,b_n>0$;

(ii) $a_k\geq 0,k=0,1,\ldots,n-1$, $b_n>\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{4(n+1)}{\alpha})^{2k}|b_{n-k}|$,

则 T_0 的所有的 J-自伴扩张T 的谱是离散的.

证明 本定理的证明与定理 7.4.1 相同的过程, 我们这里不再赘述. □

定理 7.4.4 设

$$T_0y=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k[(a_k+ib_k)x^{2k}e^{\alpha x}y^{(k)}(x)]^{(k)}, D(T_0)=C_0^\infty(a,\infty)$$

若算子 T_0 的系数 $a_k,b_k,k=0,1,\ldots,n$ 满足

(i) $a_n>0,b_n>0$;

(ii) $a_n>\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{4(n+1)}{\alpha})^{2k}|a_{n-k}|$, $b_k\geq 0,k=0,1,\ldots,n-1$,

则 T_0 的所有的 J-自伴扩张 T 的谱是离散的.

证明 本定理的证明与定理 7.4.1 相同的过程, 我们这里不再赘述. □

总结与展望

微分算子理论的研究内容纷繁复杂, 需待解决的问题众多, 本文只针对于微分算子的谱理论方面进行研究, 尤其是不连续奇异微分算子的谱及具有特殊系数的对称、J-对称微分算子的谱的离散性方面. 首先, 应用算子方法和函数论的方法, 得到了不连续奇异Sturm-Liouville问题的特征值相关性质及其渐近公式. 接着运用算子直和分解与二次型比较的方法, 研究了几类微分算子谱的离散性问题, 当其系数在一定的条件下, 得到了该类微分算子只有离散谱. 通过对具有特殊系数微分算子谱的研究得到一般系数下微分算子谱的相关信息. 沿此思路, 我们希望进一步能够解决以下问题:

1. 研究高阶不连续奇异微分算子的自伴性、特征值的相关性质及其特征值的渐近公式.

2. 研究 J-对称微分算子谱的离散性的统一框架, 即 J-对称微分算子谱是离散的充要判别准则.

3. 研究某些非对称微分算子本质谱的存在区间及谱是离散的判别条件.

4. 对多区间上对称和 J-对称微分算子的本质谱的存在区间及谱是离散的判别条件.

以上仅为作者读博士期间的一些研究成果和进一步想要研究的问题, 我们期望沿此方向能够做出一些更好的工作, 为丰富和发展微分算子的谱理论做出一点贡献. 由于作者学识所限, 缺点与不足在所难免, 敬请各位专家学者、同仁批评指正. 作者在此表示衷心感谢.

参考文献

[1] Briman I. Self-adjointness and spectra of Sturm-Liouville operators. Math. Scand., 1959,7(1):219-239.

[2] Birman M. Sh. The spectrum of singular boundary-value problem. Math. Scand., 1961, 55(97),(2):125-173.

[3] Binding P. A., Browne P. J. and Seddighi K., Sturm-liouville problem with eigenparameter dependent boundary condition. Proc.Edinburgh Math.Soc., 1993,37(2):57-72.

[4] Binding P. A., Browne P. J. and Watson B. A., Sturm-liouville problem with boundary condition rationally dependent on the eigenparameter. Journal of computational and applied mathematics, 2002,148:147-168.

[5] Binding P. A., Browne P. J. and Watson B. A., Equicalence of inverse Sturm-liouville problem with boundary condition.rationally dependent on the eigenparameter. J.Math.Anal.Appl., 2004,291:246-291.

[6] Binding P. A. and Browne P. J., Sturm-liouville problem with a non-separated eigenvalue dependent boundary condition. Proc.Roy.Soc.Edinburgh Sect.A, 2000,130:239-247.

[7] Bilender P and Allahverdiev, A dissipative singular Strum-Liouville problem with a spectral parameter in the boundary condition. J.Math.Anal.Appl., 2006,316:510-524.

[8] Birman M. SH. and Borzov V., On the asymptotics if the discrete sprctrum for certain singular differential operators. Probl.Math.Fiz.,1971,5:24-38.[In Russian;English Transl. In topics in Math.Phys., 1972,5.:19-30.

[9] Birman M. S. and Solomjak M. Z., Quantitative analysis in sobolev imbedding theorems and applications to spectral theory. Providence,rhode Island:American Mathematical Society, 1980.

[10] Behncke H., Hinton D. and Remling C., The spectrum of differential operators of order 2n with almost constant coefficients, J. Differential Equations, 2001,175(1):130-162.

[11] Behncke H., The spectrum of differential operators with almost constant coefficients II, J. Comput. Appl. Math., 2002,148(1):287-305.

[12] Bilender P. and Allahverdiev. A nonself-adjoint singular sturm-liouville problem with a spectral parameter in the boundary condition. Math. Nachr., 2005,278(7-8):743-755.

[13] 曹之江. 常微分算子, 上海科技出版社, 上海, 1987.

[14] 曹之江, 孙炯. 微分算子文集, 内蒙古大学出版社, 呼和浩特, 1992.

[15] Code W. J., Sturm-Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions, Saskatoon:University of Saskatchewan, 2003.

[16] Demirci M, Akdo$\breve{g}$an Z. and Mukhtarov O. SH., Asymptotic Behavior of Eigenvalues and Eigenfunctions of One Discontinuous Boundary-value Problem. International Journal of Computational Cognition, 2004,2(3):101-113.

[17] Dunford N. and Schwartz J. T., Linear Operators, Part II,Interscience Pub. New York London, 1963.

[18] Demuth M., Hansmann M. and Katriel G., On the discrete spectrum of non-selfadjoint operators, J. Funct. Anal., 2009,257(9):2742-2759.

[19] Došlý and Ondřej, Oscillation criteria and the discreteness of the spectrum of self-adjoint even order differential operators, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 1991,119(3-4):219-232.

[20] Everitt W. N., Integrable-square analytic solutions of odd-order, formally symmetric ordinary differential equations, Proc. London Math. Soc., 1972,25(3):156-182.

[21] Edmunds D. E. and Evans W. D., Spectra Theory and Differential Operators, Oxford University Press, Oxford, 1987.

[22] Everitt W. N., On the spectrum of the second order linear differential equation with a p-integrable coefficient, Appl. Anal., 1972,2:143-160.

[23] Edmunds D. E. and Sun J., Embedding theorems and the spectra of certain differential operators, Pro. Royal. Soc. Lond. A, 1991,434(6):643-656.

[24] Friedrichs K. O., Spectral Theory of Operators in Hilbert Space, Springer-verleg New York. Heidelberg. Berlin, 1973.

[25] Fulton C.T., Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions. Proc.Roy.Soc.Edinburgh Sect.A, 1977,77:293-308.

[26] Fulton C.T. and Pruess S., Numerical methods for a singular eigenvalue problem with eigerparameter in the boundary conditions. J.Math.Ana,Appl., 1979,71:431-462.

[27] Fulton C.T., Singular eigenvalur problem with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions. Proc.Roy.Soc.Edinburgh Sect.A, 1980,87:1-34.

[28] Fulton C.T., Asymptotics of the m-coefficient for eigenvalue problem with eigerparameter in the boundary conditions. Bull.London Math.Soc., 1981,13(6):547-556.

[29] Fleckinger J. Estimate of the number of eigenvalue for an operator of schrodinger type. Proc. Royal Soc. Edinburgh A, 1981,89(2):355-361.

[30] Glazman I. M., Direct Method of Qualitative Spectral Analysis of Singular Differential Operators, Jerusalem: Israel Programm for scientific translations, 1965.

[31] Gohberg I. C., Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators. Trans. Math. Monographs,vol.18, Amer.Math.Society, 1969.

[32] Gulmamedov V. Y. and Mamedov K. R., On basis property for a boundary-value problem with a spectral parameter in the boundary condition. Journal of Arts and Sciences Sayt, 2006,5:9-18.

[33] 郭占宽, 孙炯. 一类具指数系数的对称微分算子的谱及亏指数, 系统科学与数学, 2003,23(2):182-189.

[34] Glazman I. M., Direct Method of Qualitative Spectral Analysis of Singular Differential Operators, Jerusalem: Israel Programm for scientific translations, 1965.

[35] Hinton D. and Lewis R. T., Singular differential operators with spectra discrete and bounded below, ProRoyal Soc London A, 1979,84(2):117-134.

[36] Hao X. L., Sun J. and Zettl A., Real-parameter square-integrable solutions and the spectrum of differential operators, J. Math. Anal. Appl., 2011,376:696-712.

[37] Hao X. L, SUN J and Zettl A., The spectrum of differential operators and square integrable solutions. Journal of Functional Analysis, 2012,262:1630-1644.

[38] Ismailov Z. I., On the discreteness of the spectrum of normal second-order differential operators (Russian), Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi, 2005,49(3):5-7.

[39] Kwong M. and Zettl A., Discreteness conditions for the spectrum of ordinary differential operators, J. Diff. Equat., 1981,40(1):53-70.

[40] Kamimura Y. A. Criterion for the complete continuity of the resolvent of a 2nth order differential operator with complex coefficients. Proc. Royal. Soc. Edinburgh A., 1990,116(1):161-176.

[41] Liouville J., Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujetis à satisfaire à une même équation différentielles du second ordre. contenant un paramêtre variable, J.math.pures et appl., 1836,1:253-265.

[42] Liouville J., Second mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en sà ries dont les divers termes sont assujetis à satisfaire à une même à quation diffà rentielles du second order. contenant un paramètre variable. J.math.pures et appl., 1837,2:16-35.

[43] Liouville J., Troisième mà moire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en sèries dont les divers termes sont assujetis à satisfaire à une même à quation différentielles du second ordre, contenant un paramctre variable. J.math.pures et appl., 1837,2:418-437.

[44] Levitan B. M., Expansion in Eigenfunctions of Second-Order Differential Equations, Gostekhizdat, 1950(Russian).

[45] Likow A. V. and Mikhailov A., The theory of Heat and Mass Transfer. Qosenergaizdat, 1963(Russian).

[46] Lidskii V. B., Conditions for the complete continuity of the resolevent of a non-self-adjoint differential operator. Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 1957,113:28-31.

[47] Lidskii V. B., A nonself-adjoint operator of strum-liouville type with a discrete spectrum. Trudy Moskov. Math. Obshch., 1960,9(1):45-79.

[48] Lidskii V. B., Conditions for completeness of a system of root subspace for nonself-adjoint operators with discrete spectra. Trudy Moscow. Math. Obshch(Russian), 1959,8:83-120. English Translations:Amer. Math. Transl., 1963,34(2):241-281.

[49] Molchnov A. M., The conditions for the discreteness of the spectrum of second order differential equations, Trudy Moskov Mat. Obsc., 1953,2(1):169-200(Russian).

[50] Müller-Pferiffer E., Spectral Theory of Ordinary Differential Operators, Chichester: Ellis Horwood, 1981 (Translations).

[51] Mukhtarov O. Sh., Discontinuous Boundary-value Problem with Spectral Parameter in Boundary Conditions. Turkish Journal of Mathematics, 1994,18:183-192.

[52] Mukhtarov O. Sh.and H.Demir, Coerciveness of the Discontinuous Initial Boundary Value Problem for Parabolic Equations. Israel Journal of Mathematics, 1999,114:239-252.

[53] Muhtarov O. SH. and Muhtarov F.S., Eigenvalues and Normalized Eigenfunctions of Discontinous Strum-Liouville Problem with Transmission Conditions. Reports on Mathematical Physics,2004,54:1-56.

[54] Tunc E. and Muhtarov O. SH., Fundamental soluions and eiganvalues of one boundary-value problem with transmission conditions. Applied Mathematics and Computation,2004,157:347-355.

[55] Müller-Pferiffer E. and Sun J., On the discrete spectrum of ordinary differential operators in weighted function spaces, Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen, 1995,14(5):637-646.

[56] Manafov M. D., Spectrum of differential operator with periodic generalized potential, Dokl. Nats. Akad. Nauk Azerb., 2007,63(3):19-25.

[57] Makin A. S., On the spectrum of the Sturm-Liouville operator with degenerate boundary conditions, Dokl. Akad. Nauk, 2011,437(2):154-157 (Russian).

[58] Mcleod J. B., Eigenfunction expansions associated with a complex differential operator of second order. Quat. J. Math. Oxford Second Series, 1961,12(3):291-303.

[59] Mcleod J. B., Square-integrable solutions of a second-order differential equation with complex coefficients. Quat. J. Math. Oxford Second Series, 1962,13(2):129-133.

[60] Naimark M. A., Linear Differential Operators, Part II, London: Harrap, 1968.

[61] Reed M. and Simon B., Methods of modern mathematical physics.vol.1.New York:Academic Press, 1972.

[62] Reed M. and Simon B., Methods of modern mathematical physics.vol.2.New York:Academic Press, 1972.

[63] Race D., m(λ)-functions for conplex strum-liouville operators. Proc. Royal Society of Edinburgh, 1980,86A:275-289.

[64] Race D., On the location of the essential spectra and regularity fields of comlex Strum-Liouville operators. Proc. Royal Soc. Edinburgh A. 1980,85(1):1-14.

[65] Race D., On the essential spectra of linear 2nth order differential operators with complex coefficients. Proc. Royal Soc. Edinburgh A. 1982,92(1):65-75.

[66] Race D., the theory of J-selfadjiont extensions of J-symmetric differential operators. J. Diff. Equa., 1985,57:258-274.

[67] Race D., Dirichlet-type criteria and accretiveness criteria for complex strum-liouville operators. Diff. Integ. Equa., 1989,2(2):144-161.

[68] Race D., A note on dirichlet-type criteria for complex strum-liouville expressions, J. Diff. Equa, 1990,83(4):336-347.

[69] Race D. and Zettle A. Characterisation of the factors of quasi-differential expressions. Proc. Royal Soc. Edinburgh A. 1993,123(1):27-43.

[70] Race D., Trace formulas and behavior of large eigenvalues. SIAM J. Math. Anal., 1995,26:218-237.

[71] Sims A. R., Secondary conditions for linear differential operators of the second order. J. Math. Mech.,1957,6(3):247-285.

[72] Sturm, C., Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre. J.math.pures et appl., 1836,1:106-186.

[73] Sturm, C., Mémoire sur une classe d' équations à différentielles partielles[J]. J. math. pures et appl., 1836,1:373-444.

[74] Weidmann J., Spectral Theory of Ordinary Differential Operators, Lecture Notes in Mathematics 1258, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[75] Solomyak M. Z., The discrete spectrum of a family of differential operators (Russian), Funktsional. Anal. iPrilozhen, 2004,38(3),70-78; translation in Funct. Anal. Appl., 2004,38(3):217-223.

[76] Sun J., On the spectrum of a class of differential operators and embedding theorems, Math. Sinica (New Series), 1994,10(5):415-427.

[77] 孙炯, 王忠. 常微分算子谱的定性分析, 数学进展, 1995,24(5):406-422.

[78] 孙炯, 王忠. 线性算子的谱分析, 北京: 科学出版社, 2005.

[79] 孙炯, 王万义. 微分算子的自共轭域和谱分析- 微分算子研究在内蒙古大学三十年, 内蒙古大学学报(自然科学版), 2009,40(4):469-485.

[80] 孙炯, 王万义, 郑志明. Complex symplectic geometry characterizations for self-adjoint domains of 2n-th order singular differential operators, 第二届华人数学大会, 2001年12月(ICCM 2001,台北).

[81] 尚在久. On J-selfadjoint extensions of J-symmetric ordinary differential operators, J. Diff. Equa., 1988,73:153-177.

[82] 尚在久. 关于J-对称微分算子的J-自伴扩张的若干注记. 数学学报, 1996,39(3):387-395.

[83] 索建青, 王万义. Two-interva l even order Differential Operators in modified Hilbert Spaces, Bulletin of the Australian Mathematical Society, 2012,85(02):241-260.

[84] 索建青, 王万义. Two-interval even order Differential Operators In Direct Sum Spaces, Results. Math., 2012,62:13 - 32.

[85] 索建青, 王万义. Eigenvalues of a class of regular fourth-order Sturm - Liouville problems, Applied Mathematicsand Computation, 2012,218:9716 - 9729.

[86] Titchmarsh E. C., Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations, Part I, second edition, Oxford, 1962.

[87] Walter J., Regular eigenvalue problem with eigenvalue parameter in the boundary condition. Mathematische Zeitschrift, 1973,133(4):301-312.

[88] Weidmann J., Linear Operators in Hilbert Spaces, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[89] 王忠, 孙炯. Euler 微分算子谱是离散的充分必要条件, 系统科学与数学, 2001,21(4):497-506.

[90] 王忠. 一类自伴微分算子谱的离散性, 数学学报, 2001,44(1):95-102.

[91] 王忠. 高阶对称微分算子谱是离散的一个充分必要条件, 系统科学与数学, 2000,20(2):224-227.

[92] 王忠. 复系数2n阶微分算子的谱, 数学学报, 2000,43(5):787-796.

[93] 王忠, 孙炯. J-自共轭微分算子谱的定性分析, 数学进展, 2001,30(5):405-413.

[94] Wang W. Y. and Sun J., Complex J-Symplectic Geometry Characterization for J-Symmetric Extensions of J-Symmetric Differential Operators. Advances in Mathematics, 2003,34(4):481-484.

[95] Wang W. Y. and Zheng Z. M. and Sun J. Weighted Poincaréinequalities on one-dimensional unbounded domains. Applied Mathematics Letters, 2003,16:1143-1149.

[96] Wang W. Y., Han M. A. and Sun J., On Hopfcyclicity of planar systems with multiple parameters. Applied Mathematics Letters, 2005,18(6):613-619.

[97] 王万义, 孙炯. 高阶常型微分算子自伴域的辛几何刻画, 应用数学, 2003,16(1):17-22.

[98] 王桂霞, 孙炯. 求解一类不连续的Sturm-Liouville问题. 系统科学与数学, 2009,29(6):839-848.

[99] N.N. Voitovich, B.Z. Katsenelbaum, A.N. Sivov, Generalized method of eigenvibration in the theory of diffraction, Nauka,Moskov, 1997(Russian).

[100] Yang Q. X. and Wang W. Y., Eigenvalues of Sturm-Liouville Problem with Transmission Conditions, Journal of Inner Mongolia University, 2009,40(3):252-258.

[101] Yang Q. X. and Wang W.Y., Asymptotic Behavior of a Differential Operator with Discontinuities at Two Points. Mathematical Methods in the Applied Science, 2011,34(4):373-383.

[102] 杨传富, 黄振友, 杨孝平. 偶阶非对称微分算子离散谱准则, 数学进展, 2007,36(2):160-168.

[103] Zettl A., Sturm-Liouville Theory. Mathematical Surveys and Monographs, Vol.121, American Mathematics Society, 2005.

[104] 王万义. 微分算子的辛结构与一类微分算子的谱分析 (博士学位论文), 内蒙古大学, 2002.

[105] 王爱平.关于 Weidmann 猜想及具有转移条件微分算子的研究 (博士学位论文), 内蒙古大学, 2006.

[106] 郝晓玲. 微分算子实参数平方可积解的个数与谱的定性分析 (博士学位论文), 内蒙古大学, 2010.

[107] 杨秋霞. 几类权函数变号的微分算子的谱 (博士学位论文), 内蒙古大学, 2011.

[108] 索建青. 两区间微分算子自伴域的实参数解刻画及谱的离散性 (博士学位论文), 内蒙古大学, 2012.

主 要 符 号 表

Im	虚部
Re	实部
$\mathbb{R}$	实数域
$\mathbb{C}$	复数域
$\dot{+}$	空间的直和
$\oplus$	空间的正交直和
$\overline{\lambda}$	复数 λ 的共轭
$\det A$	表示矩阵 A 的行列式
$\mathscr{D}(T)$	算子 T 的定义域
$\mathscr{R}(T)$	算子 T 的值域
$\mathscr{N}(T)$	算子 T 的零空间
$\mathscr{R}(T)^{\perp}$	算子 T 的值域的正交补空间
T^*	算子 T 在 *Hilbert* 空间中的共轭算子
$\sigma(T)$	算子 T 的谱集
$\rho(T)$	算子 T 的预解集
$\sigma_c(T)$	算子 T 的连续谱集
$\sigma_p(T)$	算子 T 的点谱集
$\sigma_r(T)$	算子 T 的剩余谱集
$\sigma_d(T)$	算子 T 的离散谱集
$\sigma_e(T)$	算子 T 的本质谱集
$\mathrm{def}T$	算子 T 的亏指数
$AC_{loc}(a,b)$	区间 (a,b) 内所有紧子区间上绝对连续的函数全体
$L(I,\mathbb{R})$	在 I 上定义的 Lebesgue 可积实值函数的全体
$[\cdot,\cdot]$	与微分算式相关联的 Lagrange 共轭双线性型
$W[\phi_1,\cdot,\phi_n]$	函数 $\phi_1,\cdot,\phi_n$ 的 Wronsky 行列式

致谢

在论文即将完成之际, 心中感慨无限. 回眸过往, 一路坎坎坷坷走来, 需要感谢的人太多, 这些简单的文字所着实不能完全表达的. 首先最诚挚的感谢我的导师王万义教授. 感谢恩师对我的淳淳教诲和悉心关怀. 他学识渊博、洞察力敏锐, 在我论文的选题、撰写过程中提供了关键性的启发和帮助. 他严谨求实的治学态度、宽厚仁慈的胸怀、高效的工作作风、秉承着"学高为师, 身正为范"的教育理念, 始终感染着我、激励着我, 这些都将成为我人生的宝贵的财富, 让我受益终身. 他的谆谆教诲与鞭策将激励我在科学和教育的道路上奋发图强, 锐意进取. 我衷心的祝愿恩师及全体家人健康、幸福、快乐!

师从恩师门下以来, 他不仅在百忙中为我们答疑解惑, 为了让我们汲取更多的科研精髓还将我们引荐给他的导师孙炯教授. 孙教授知识渊博, 治学严谨, 平易近人, 不吝赐予的修养都是我学习的典范, 在此表达我诚挚的谢意, 愿您身体健康, 万事如意!

感谢内蒙古大学数学科学学院的各位领导和老师对我的培养和教育. 数学科学学院热烈的学术氛围, 感染着我, 使我在潜移默化中不断进步成长.

感谢内蒙古师范大学数学科学学院的各位领导和老师对我的培养.

感谢师姐杨秋霞、张新艳、同学索建青、许美珍、葛素琴多年来给予我的关怀和勉励, 我们共同进步, 共同成长.

感谢内蒙古师范大学彭鹏等师弟师妹们给于我的诸多帮助.

感谢郝晓玲、姚斯琴、敖继军、张茂柱以及工作室的其他同学, 生命中有他们的陪伴, 使我度过了愉快充实的博士研究生生活.

最后我要郑重的感谢我的家人. 感谢父母们对我学业的支持与配合, 亲情的温暖是我最大的精神支柱, 是他们的无私关爱与付出, 才促成了我的今天, 我衷心的祝愿你们幸福安康. 特别感谢我的爱人刘芳女士, 她的陪伴是我前行的最大动力, 她的体谅和支持激励着我继续前进. 谨以此文献给我挚爱的家人们, 这远不能表达我的感激之情, 我将继续努力, 以更大的成绩作以回报, 在此祝愿他们一生安康.

铭记和感激教育、培养、关心和帮助过我的每一个人!

周立广

二〇一三年三月于呼和浩特

攻读学位期间已完成的学术论文

1. 周立广, 王万义. 索建青. 一类高阶微分算子谱的离散性的充分必要条件. 系统科学与数学, 2013,33(3):373-382.

2. 周立广, 王万义, 索建青. 边界条件含特征参数的奇异不连续Sturm-Liouville 算子的渐近特征. 数学的实践与认识, 2012, 42(18):242-251.

3. 周立广, 王万义, 索建青. Spectrum of singular Sturm-Liouville problem with eigenparameter dependent boundary conditions and transmission conditions. 内蒙古大学学报(自然科学版), 2010, 41(6):601-609.

4. 周立广, 王万义. 一类具幂指积系数微分算子谱的离散性. 数学物理学报, 已接收.

5. 周立广, 王万义. The Discreteness of Spectrum of A Class of Differential Operators with Coefficients of Euler-exponential Product Functions. 数学进展, 已接收.

6. 周立广, 王万义. The Discreteness of Spectrum of A Class of J-symmetric Exponential Differential Operators. 已投《中国科学·数学》(英文版).

7. 周立广, 王万义. Asymptotic Behaviors of a Discontinuous Singular Sturm-Liouville Problem. 已投《应用数学》.

8. 周立广, 王万义. The Discrete Spectrum of A Class of J-symmetric Power-exponential Differential Operators. 已整理完毕, 待投.

9. 周立广, 王万义. The Discreteness of Spectrum of A Class of J-symmetric Euler-exponential Differential Operators. 已整理完毕, 待投.

10. 索建青, 王万义, 周立广. 一类具指数系数的对称微分算子谱是离散的充分条件, 系统科学与数学, 2013,33(2):236-245.

11. 索建青, 王万义, 周立广. 一类具指数系数的对称微分算子谱的离散性, 数学的实践与认识, 2012, 42(5): 225-231.

12. 索建青, 王万义, 周立广. 一类自伴微分算子谱是离散的充分必要条件. 内蒙古大学学报(自然科学版), 2012, 43(6):574-578.

13. 许美珍, 王万义, 周立广, 索建青. 两个奇型微分算子积的Friedrichs 扩张, 内蒙古大学学报(自然科学版), 2010, 41(6): 618-624.

几类微分算子的谱分析

作者： 周立广
学位授予单位： 内蒙古大学